Všeobecná rovnica priamky v rovine

RNDr. Viera Vodičková

U: Všeobecná rovnica priamky je jeden zo spôsobov ako môžeme analyticky vyjadriť priamku, čiže priradiť jej rovnicu.

Ž: *Ja tiež poznám jeden spôsob, viem priamku vyjadriť parametricky.*

U: Áno, priamku vieme vyjadriť parametrickou rovnicou $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Ž: *Mne sa skôr zdá, že to nie je parametrická rovnica, ale parametrické rovnice. Veď sú dve, alebo v priestore dokonca tri.*

U: Máš pravdu. Teraz sa budeme zaoberať ***len priamkou v rovine***. Priamku v rovine môžeme vyjadriť parametrickými rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $A[a_1; a_2]$ je bod priamky a $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je smerový vektor priamky.

Ž: *Sú dve rovnice nutné? Nedá sa to nejako zjednodušiť?*

U: Presne to teraz urobíme. Asi si si všimol, že v oboch rovniciach vystupuje parameter t.

Ž: *Skúsime ho z nich odstrániť?*

U: Pokúsime sa. Z prvej rovnice si vyjadríme parameter a dosadíme do druhej.

Ž: *To by som vedel aj ja urobiť. Máme rovnicu:*

$$x = a_1 + tu_1.$$

Odpočítam a_1:

$$x - a_1 = tu_1.$$

Teraz vydelím s u_1 a máme vyjadrený parameter t:

$$t = \frac{x - a_1}{u_1}.$$

U: Musíme však dodať, že sme to mohli urobiť len za pomienky, že $u_1 \neq 0$. K prípadu, ak bude $u_1 = 0$, sa vrátime neskôr. Dosadíme vyjadrenie parametra t do druhej rovnice. To by si tiež mohol urobiť sám.

Ž: *OK. Druhá rovnica je*

$$y = a_2 + tu_2.$$

Dosadzujem:

$$y = a_2 + \frac{x - a_1}{u_1} \cdot u_2.$$

U: Rovnicu, ktorú sme dostali upravíme. Odstránime zlomky, vynásobíme rovnicu výrazom u_1:

$$u_1 y = u_1 a_2 + (x - a_1) u_2.$$

Roznásobíme zátvorku a všetky členy rovnice dáme na ľavú stranu:

$$-u_2 x + u_1 y - u_1 a_2 + u_2 a_1 = 0.$$

Ž: *Všimol som si, že ste členy zároveň zoradili. Najprv ide x, potom y a potom ostatné.*

U: Výborný postreh! Premennými v rovnici sú len x a y. To sú súradnice ľubovoľného bodu priamky.

Ž: *A čo ostatné premenné: u_1, u_2, a_1, a_2 ?*

U: Nenazýval by som ich premennými. Sú to súradnice jedného konkrétneho bodu priamky a jedného konkrétneho smerového vektora priamky. Pre danú rovnicu sú to konštanty. Aby sme ich tam nemali toľko, preoznačíme si ich. Konštantu pri x nazveme a, konštantu pri y nazveme b a zvyšok označíme ako c.

$$-u_2 x + u_1 y + (-u_1 a_2 + u_2 a_1) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Túto rovnicu nazývame ***všeobecná rovnica priamky v rovine***.

Ž: *Fíha, to je už iná rovnica ako parametrická. Na pohľad vyzerá jednoduchšie.*

U: Vrátime sa teraz k prípadu $u_1 = 0$.

Ž: *Spomínam si. To bolo vtedy, keď sme chceli vyjadriť t a delili sme rovnicu s u_1.*

U: Problém je v tom, že ak $u_1 = 0$ rovnicu nulou deliť nemôžeme. Pozrime sa však, ako by vyzerali parametrické rovnice priamky v tomto prípade.

Ž: *Parametrické rovnice priamky boli*

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ak $u_1 = 0$, dostávame:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

U: Ak si všimneš, v prvej rovnici nevystupuje parameter t. Preto prvá rovnica už predstavuje všeobecnú rovnicu priamky. Len je potrebné ju upraviť:

$$x - a_1 = 0.$$

Ž: *Je voľajaká kratšia ...*

U: Chýbajú v nej niektoré členy. Opäť si, tak ako v predchádzajúcom, označíme farebne konštanty a máme:

$$1 \cdot x + (-a_1) = 0$$

$$ax + c = 0$$

Ž: *Chýba modrý člen s y.*

U: Áno. Nakoľko $u_1 = 0$, tak aj koeficient $b = 0$.

U: ***Rovnicu tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$, nazývame všeobecnou rovnicou priamky v rovine.***

Ž: *Prečo tam máme podmienku $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$?*

U: Táto podmienka súvisí s tým ako vznikli koeficienty a a b. Vo vyfarbenej rovnici si všimni, že $a = -u_2$ a $b = u_1$.

Ž: *$u_1; u_2$ sú súradnice smerového vektora priamky, vektora $\vec{u}$.*

U: Smerový vektor priamky nemôže byť nulový:

$$\vec{u} \neq \vec{0}.$$

Ž: *To znamená, že nemôže mať obe súradnice nulové, vždy musí byť aspoň jedna nenulová.*

U: Správne, preto aj koeficienty a a b nemôžu byť naraz rovné nule.
Navyše si ešte raz všimnime:

$$a = -u_2, \quad b = u_1.$$

Vyrobíme si nový vektor, nazvime ho $\vec{n}$ so súradnicami $\vec{n} = (a; b)$. Porovnajme ho so smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Ž: *Vektor $\vec{n}$ má súradnice $(a; b) = (-u_2; u_1)$. Sú to skoro rovnaké súradnice ako súradnice smerového vektora, akurát sú vymenené a prvá má zmenené znamienko na mínus.*

U: Áno, a ak si spomínaš, niečo také sa nám už objavilo pri skalárnom súčine.

Ž: *Jasné. Vyrábali sme tak kolmý vektor, zmenili sme poradie súradníc a v jednej vymenili znamienko, aby bol skalárny súčin rovný nule.*

U: Vypočítajme skalárny súčin vektorov $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{n} = (a; b) = (-u_2; u_1)$.

Ž: *Skalárny súčin vypočítam, ak vynásobím prvé súradnice a k tomu pripočítam súčin druhých súradníc.*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1 \cdot (-u_2) + u_2 \cdot u_1 = -u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0.$$

Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{n}$ je rovný nule.

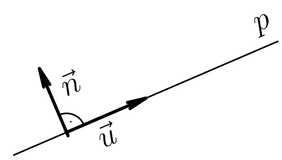
U: Ak je skalárny súčin dvoch nenulových vektorov rovný nule, vektory sú na seba kolmé. Znamená to, že $\vec{n} \perp \vec{u}$.

Ž: *Smerový vektor $\vec{u}$ sa dá umiestniť na priamku.*

U: Áno, preto vektor $\vec{n}$ je kolmý nielen na vektor $\vec{u}$, ale aj na priamku. Nazýva sa preto ***normálový vektor priamky***.

Ž: *S podobným pojmom som sa už stretol na fyzike. Mali sme tam* **normálu**. *Bola to kolmica na danú plochu.*

U: Tu je to obdobné. Vektor sa nazýva normálový, lebo je kolmý na danú priamku. Celú situáciu si môžeš pozrieť aj na obrázku.



Ž: *Ale normálových vektorov môže mať priamka aj viac.*

U: Samozrejme. Je to ako so smerovými vektormi. Avšak, všetky normálové vektory priamky sú lineárne závislé.

Ž: *Všetky sú teda násobkom toho istého vektora.*

U: Keďže normálových vektorov je nekonečne veľa, jedna priamka má aj nekonečne veľa všeobecných rovníc. Stačí rovnicu vynásobiť ľubovolným reálnym číslom, samozrejme, okrem nuly.

Ž: *Myslíte to tak, že ak napr.*

$$3x - y + 1 = 0$$

bude všeobecná rovnica nejakej priamky, tak aj jej desaťnásobok

$$30x - 10y + 10 = 0$$

bude tiež všeobecná rovnica tej istej priamky?

U: Presne tak. V prvej rovnici je použitý normálový vektor priamky so súradnicami $(3; -1)$ a v druhej rovnici jeho desaťnásobok so súradnicami $(30; -10)$.
Vieme už, že priamku v rovine môžeme jednoznačne určiť bodom priamky a jej smerovým vektorom.

Ž: *Áno, to potrebujem pri parametrickom vyjadrení priamky.*

U: Priamku v rovine však môžeme jednoznačne určiť aj bodom priamky a jej normálovým vektorom. Znamená to, že na určenie všeobecnej rovnice priamky potrebujeme bod a normálový vektor.

U: Teraz sa pozrieme ***na priamku v priestore***.

Ž: *To bude asi to isté. Len niekde pribudne tretia neznáma. Môžem skúsiť? Priamka v priestore bude mať všeobecnú rovnicu:*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

U: Máš pravdu, taká rovnica sa nám na základe analógie rovina - priestor rovno ponúka. Do všeobecnej rovnice priamky v rovine si pridal tretí člen cz.

Ž: *Bolo to jednoduché, nie?*

U: Je mi ľúto, že ťa musím sklamať. Zoberme si konkrétny prípad. Tak napr. rovnica

$$x + y + z - 1 = 0$$

spĺňa tvoju predstavu o všeobecnej rovnici priamky v priestore.

Ž: *Súhlasím.*

U: Všetky body, ktorých súradnice vyhovujú tejto rovnici, ležia na jednej priamke.

Ž: *Aj s tým súhlasím.*

U: Poďme to overiť pre nejakú náhodnú trojicu bodov. Zvolíme si tri rôzne body, ktorých súradnice vyhovujú danej rovnici.

Ž: *Rozumiem. Takže dve súradnice si zvolím a tretiu dopočítam podľa rovnice. Viem už, že voliť si mám, čo najjednoduchšie. Nech napr.* $x = 0$ *a* $y = 0$. *Potom po dosadení do rovnice máme:*

$$0 + 0 + z - 1 = 0.$$

Z čoho $z = 1$. *Prvý bod, nazvem ho* A, *má súradnice* $A[0; 0; 1]$.

U: Výborne. Ostatné dva zvládneme aj spamäti. Nech napr. $x = 0$ a $z = 0$.

Ž: *Potom platí* $y = 1$. *Bod* B *má súradnice* $B[0; 1; 0]$. *A do tretice, nech napr.* $y = 0$ *a* $z = 0$, *potom* $x = 1$. *Bod* C *má súradnice* $C[1; 0; 0]$.

U: Máme tri body $A[0; 0; 1]$, $B[0; 1; 0]$ a $C[1; 0; 0]$. Súradnice týchto bodov vyhovujú tvojej všeobecnej rovnici priamky. Čo myslíš, naozaj ležia tieto tri body na jednej priamke?

Ž: *Uf! Na prvý pohľad vidno, že nie! Bod* A *leží na osi* z, *bod* B *na osi* y *a bod* C *na osi* x. *Vytvárajú krásny trojuholník! Prečo je to tak? Kde sa stala chyba?*

U: Vráťme sa k všeobecnej rovnici priamky v rovine. Povedali sme, že priamku v rovine môžeme jednoznačne určiť bodom priamky a jej normálovým vektorom. Normálový vektor, to je vektor kolmý na danú priamku. A to sa v priestore ukazuje ako problém.

Ž: *Aha! Kolmých vektorov na priamku v priestore existuje nekonečne veľa. A nie sú to len násobky toho istého vektora.*

U: Máš pravdu. Pre priamku v priestore nemá zmysel definovať normálový vektor. Zapamätaj si, že ***priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu. Priamku v priestore vieme vyjadriť parametricky.***
To, čo si uviedol, je v skutočnosti všeobecná rovnica roviny.

U: Na záver si to zhrnieme. Ako vyzerá všeobecná rovnica priamky v rovine?

Ž: *Všeobecná rovnica priamky v rovine je takáto:*

$$ax + by + c = 0, \quad \textbf{kde } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \textbf{pričom } \ a \neq 0 \vee b \neq 0.$$

U: Aký význam majú koeficienty vo všeobecnej rovnici?

Ž: *Myslíte čísla* a *a* b*?*

U: Presne tie.

Ž: *Koeficienty* a *a* b *sú súradnice normálového vektora.*

U: Aká je základná vlastnosť normálového vektora priamky?

Ž: *Je to vektor kolmý na smerový vektor priamky, a teda aj kolmý na priamku.*

U: Ako je to s priamkou v priestore?

Ž: *Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu.*

Priamka v rovine

všeobecná rovnica : $ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad$ pričom $\; a \neq 0 \vee b \neq 0$

normálový vektor : $\vec{n} = (a; b)$je kolmý na priamku

Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu

Príklad 1: *Priamka p je daná všeobecnou rovnicou: $3x - 6y + 4 = 0$. Určte*

(a) súradnice normálového vektora priamky p,

(b) súradnice smerového vektora priamky p.

Ž: *V zadaní je napísané, že priamka je daná všeobecnou rovnicou. Ako by som to ale zistil, ak by to tam nenapísali?*

U: Tak napríklad ľahká pomôcka je počet rovníc. Parametrické vyjadrenie priamky v rovine pozostáva z dvoch rovníc, v priestore z troch.

Ž: *Aha, a keď bude len jedna, tak je to všeobecná rovnica.*

U: V podstate áno. Ďalšou pomôckou môže byť prítomnosť parametra, najčastejšie označovaného ako t.

Ž: *Tak dobre, rozoznať typ rovnice už zvládnem.*

U: Máme najprv určiť súradnice normálového vektora. Čo o ňom vieš?

Ž: *Normalový vektor je vektor kolmý na priamku, od slova normála - kolmica. Taktiež viem, že jeho súradnice sa vyskytujú vo všeobecnej rovnici priamky.*

U: Správne. Ak má priamka všeobecnú rovnicu

$$ax + by + c = 0,$$

tak koeficienty a a b tvoria súradnice jej normálového vektora.

Ž: *Aha. Stačí sa mi pozrieť na koeficienty pri x a pri y, t. j. aké sú tam čísla. Vyznačím si ich farebne:*

$$\boxed{3x - 6y + 4 = 0}$$

Ž: *Vidím, že súradnice normálového vektora sú:*

$$\vec{n} = (3; -6).$$

U: Výborne. Ideme teraz na druhú úlohu. Aké súradnice bude mať smerový vektor priamky?

Ž: *Ten by sa dal prečítať z parametrickej rovnice priamky, ale takú, žiaľ, nemáme.*

U: Aký je vzťah medzi smerovým a normálovým vektorom priamky?

Ž: *Už som povedal, že normálový vektor je kolmý na priamku. Smerový vektor môžeme zasa na priamku umiestniť. To ale znamená, že smerový a normálový vektor sú na seba kolmé.*

U: Pripomeniem, že skalárny súčin kolmých vektorov je rovný nule. Stačí preto zobrať súradnice normálového vektora $\vec{n} = (3; -6)$, vymeniť ich poradie a jednej súradnici zmeniť znamienko. Dostaneme tým jeden z vektorov, ktorý je kolmý na vektor $(3; -6)$.

Ž: *To bude napríklad vektor so súradnicami* $(6; 3)$.

U: Áno. Smerovým vektorom danej priamky je napríklad vektor

$$\vec{u} = (6; 3).$$

Úloha 1: *Určte smerový vektor priamky danej rovnicou* $5x - 2y + 8 = 0$.

Výsledok: napr. $\vec{u} = (2; 5)$

Príklad 2: *Daná je priamka* $p:\ 3x + y - 11 = 0$.

a) Rozhodnite, či bod $N[10; -12]$ *patrí priamke* p.

b) Určte číslo k *tak, aby bod* $K[k; 2]$ *patril priamke* p.

U: Akou rovnicou máme danú priamku?

Ž: *Je to len jedna rovnica a nevystupuje tam parameter . . . ide o všeobecnú rovnicu priamky.*

U: Vedel by si mi povedať, aký má normálový vektor?

Ž: *Samozrejme. Pozriem sa na koeficienty pri* x *a pri* y *- normálový vektor má súradnice* $(3; 1)$.

U: Výborne. Pracovať so všeobecnou rovnicou už ako tak vieš. Pozrime sa na úlohy, ktoré nás čakajú.

Ž: *Mám rozhodnúť, či bod* $N[10; -12]$ *patrí priamke* p.

U: Vždy platí zásada: ***ak bod patrí priamke, tak jeho súradnice vyhovujú rovnici priamky.*** Nezáleží, či je všeobecná alebo parametrická.

Ž: *Ale ako mám dosadiť súradnice do rovnice priamky?*

U: V rovnici priamky vystupujú členy x a y. To sú súradnice ľubovoľného bodu priamky.

Ž: *Dobre teda. Mám všeobecnú rovnicu priamky:*

$$3x + y - 11 = 0.$$

Dosadím namiesto x *prvú súradnicu bodu* N*, t. j. číslo* 10 *a namiesto* y *druhú súradnicu bodu* N*, t. j. číslo* (-12)*. Dostávam:*

$$3 \cdot 10 + (-12) - 11 = 0.$$

Ľavú stranu vyčíslim a vychádza mi:

$$7 = 0.$$

U: Správne by si mal napísať

$$7 \neq 0.$$

Súradnice bodu N nevyhovujú rovnici priamky p, pretože neplatí rovnosť.

Ž: *Bod* N *neleží na priamke* p.

U: V druhej úlohe máme určiť číslo k tak, aby bod $K[k; 2]$ patril priamke p.

Ž: *Už viem, že ak má bod* K *patriť priamke, musia jeho súradnice vyhovovať rovnici priamky.*

U: Tak ich tam dosaďme.

Ž: *Dobre. Mám opäť všeobecnú rovnicu priamky:*

$$3x + y - 11 = 0.$$

Dosadím namiesto x *prvú súradnicu bodu* K*, t. j. neznámu* k *a namiesto* y *druhú súradnicu bodu* K*, t. j. číslo* 2*. Dostávam:*

$$3k + 2 - 11 = 0.$$

U: To je pekná lineárna rovnica s jednou neznámou. Vyriešme ju.

Ž: *Rovnicu upravím a dostávam:*

$$3k = 9.$$

Z čoho je jasné, že

$$k = 3.$$

U: Áno. Bod K má súradnice $K[3; 2]$.

Úloha 1: *Daná je priamka* $p:\ x - y - 6 = 0$*. Rozhodnite, či body* $A[10; -6]$ *a* $B[1; -5]$ *patria priamke* p*.*

Výsledok: A nie, B áno.

Príklad 3: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ak je kolmá na vektor $\vec{n} = (2; -1)$ a prechádza bodom $P[1; 3]$.*

U: Zopakujme si: Všeobecnou rovnicou priamky v rovine nazývame rovnicu tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Ž: *Áno, poznám to. Koeficienty a a b sú, tuším, súradnice normálového vektora.*

U: Správne tušíš. Vieš aj aký je to normálový vektor?

Ž: *Normála = kolmica. Normálový vektor je vektor kolmý na priamku.*

U: Áno. Pozrieme sa na zadanie príkladu a vidíme, že máme daný vektor $\vec{n} = (2; -1)$, ktorý je kolmý na priamku p. Vektor $\vec{n}$ je preto normálový vektor priamky p. Jeho súradnice ...

Ž: *... si môžeme dosadiť namiesto koeficientov vo všeobecnej rovnici priamky. Teda namiesto koeficientu a dosadím prvú súradnicu vektora $\vec{n}$, t. j. 2 a namiesto b druhú súradnicu, t. j. (-1). Všeobecná rovnica priamky p by potom mohla vyzerať takto:*

$$2x - y + c = 0.$$

U: Ostáva nám koeficient c.

Ž: *O tom ale nič nevieme. Nie je to súradnica žiadneho vektora.*

U: To nie. Zistíme ho však veľmi jednoducho. Máme ešte daný bod $P[1; 3]$. Tento bod patrí priamke, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici priamky.

Ž: *Aha. Môžeme dosadiť jeho súradnice za x a y v rovnici. Dostávame:*

$$2 \cdot 1 - 3 + c = 0.$$

U: Je to jednoduchá rovnica s jednou neznámou c.

Ž: *Rýchlo ju vyriešim. $2 - 3 = -1$. Pripočítam 1 a mám*

$$c = 1.$$

U: Ako bude teda vyzerať všeobecná rovnica priamky p?

Ž: *Zhrniem si to:*

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 1.$$

Rovnica priamky p:

$$2x - y + 1 = 0.$$

U: Správne.

Ž: *Dobre som to pochopil? Chcem napísať všeobecnú rovnicu priamky: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b môžem hneď dosadiť, lebo sú to súradnice normálového vektora. Na vypočítanie koeficientu c potrebujem napr. jeden bod priamky, ten dosadím a mám to.*

U: Celkom si to vystihol. Priamka je teda daná jej normálovým vektorom a jedným bodom.

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ak je kolmá na vektor $\vec{n} = (1; 4)$ a prechádza bodom $P[2; -1]$.*

Výsledok: $x + 4y + 2 = 0$

Príklad 4: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky $\overleftrightarrow{AB}$, ak $A[-3;7]$ a $B[-2;1]$.*

U: Na začiatok si pripomenieme: Všeobecnou rovnicou priamky v rovine nazývame rovnicu tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Ž: *To si pamätám. Ešte viem, že na napísanie všeobecnej rovnice priamky potrebujem poznať jej normálový vektor a jeden bod priamky. Body mám až dva, ale normálový vektor žiaden.*

U: Pomocou dvoch bodov priamky by sme však mohli nejaký vektor vyrobiť.

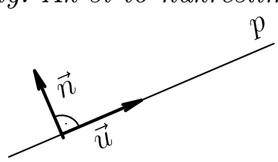
Ž: *To áno. Bude to však smerový vektor, nie normálový.*

U: Myslíš, že smerový vektor nesúvisí s normálovým?

Ž: *Moment! Smerový vektor leží na priamke ...*

U: Presnejšie, vieme ho na ňu umiestniť.

Ž: *A normálový je na priamku kolmý. Ak si to nakreslím ...*



Ž: *...je mi hneď jasné, že normálový a smerový vektor sú navzájom kolmé.*

U: Výborne. To znamená, že ak budeme poznať súradnice smerového vektora, nájdeme aj súradnice normálového.

Ž: *Fajn, tak sa do toho pustím. Smerový vektor označím ako $\vec{u}$ a bude to vektor $B - A$. Súradnice bodov sú $A[-3;7]$ a $B[-2;1]$. Preto vektor $\vec{u}$ bude mať súradnice:*

$$\vec{u} = B - A = (-2-(-3); 1-7) = (1; -6).$$

U: Výborne. Ako nájdeme súradnice normálového vektora?

Ž: *Normálový vektor je kolmý na smerový. Stačí preto len vymeniť súradnice a v jednej, napríklad v prvej, zmeniť znamienko. Normálový vektor bude mať súradnice:*

$$\vec{n} = (6; 1).$$

U: Môžeme to urobiť preto, lebo skalárny súčin kolmých vektorov je rovný nule.
Máme súradnice normálového vektora a jedného bodu priamky, dajme tomu, že bodu A. Napíšme všeobecnú rovnicu priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

Ž: *Všeobecná rovnica priamky je:*

$$ax + by + c = 0.$$

Namiesto koeficientov a a b môžem hneď dosadiť súradnice normálového vektora:

$$6x + y + c = 0$$

Teraz dosadím súradnice bodu $A[-3; 7]$.

U: Pretože súradnice bodu, ktorý patrí priamke, musia vyhovovať jej rovnici.

Ž:

$$6 \cdot (-3) + 7 + c = 0$$

Vypočítam c:

$$c = 11.$$

Všeobecná rovnica priamky $\overleftrightarrow{AB}$ je:

$$6x + y + 11 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá prechádza bodmi $P[2; -1]$ a $Q[1; 7]$.*

Výsledok: $8x + y - 15 = 0$

Príklad 5: *Priamka je daná parametrickými rovnicami $x = 3 - 2t,\ y = -4 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Napíšte jej všeobecnú rovnicu.*

Ž: *Všeobecná rovnica priamky vyzerá asi takto:*

$$ax + by + c = 0.$$

U: Kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Ž: *Na napísanie všeobecnej rovnice priamky potrebujem poznať jej normálový vektor a jeden bod priamky. Bod by som vedel nejaký nájsť. Je to napr. bod A so súradnicami $A[3; -4]$. Súradnice som zistil z parametrických rovníc $x = 3 - 2t,\ y = -4 + t,\ t \in \mathbb{R}$, sú to tie čísla hneď za znamienkom rovná sa.*

U: To si šikovný.

Ž: *Čo však urobíme s normálovým vektorom?*

U: Nezabúdaj, že normálový vektor je vektor kolmý na priamku. Ak je kolmý na priamku, tak je kolmý aj na vektor, ktorý vieme na priamku umiestniť.

Ž: *Ten sme, tuším, volali smerový vektor priamky.*

U: Správne. Vedel by si jeho súradnice?

Ž: *Asi nie ... alebo predsa! To sú tie druhé čísla v parametrických rovniciach.*

U: Aké druhé čísla?

Ž: *Predsa tie, čo stoja pri parametri t. Smerový vektor, označím ho $\vec{u}$, má súradnice $\vec{u} = (-2; 1)$.*

U: Výborne. Teraz potrebujeme normálový vektor, t. j. vektor kolmý na smerový. Spomeň si, že skalárny súčin kolmých vektorov je rovný nule.

Ž: *Aha, to je toto. Prehodím súradnice vektora $\vec{u}$ a v jednej zmením znamienko, teda mínus pred dvojkou dám preč. Preto normálový vektor $\vec{n}$ bude mať súradnice $\vec{n} = (1; 2)$.*

U: Máme všetko pripravené. Normálový vektor priamky $\vec{n} = (1; 2)$ a bod priamky $A[3; -4]$.

Ž: *Všeobecná rovnica priamky vyzerá takto:*

$$ax + by + c = 0.$$

Koeficienty a a b sú súradnice normálového vektora, môžem ich dosadiť:

$$x + 2y + c = 0.$$

U: Výborne, ostáva nám koeficiet c.

Ž: *Na to použijem bod A.*

U: Pretože, ak bod A patrí priamke, musia jeho súradnice vyhovovať rovnici priamky.

Ž: *Dosadím súradnice bodu A do rovnice priamky:*

$$3 + 2 \cdot (-4) + c = 0.$$

Vypočítam:

$$c = 5$$

Všeobecná rovnica priamky je táto:

$$x + 2y + 5 = 0.$$

U: Išlo ti to výborne. Chcem ti však ukázať ešte iný spôsob, ako z parametrických rovníc dostaneme rovnicu všeobecnú.

Ž: *No dobre. Potom to porovnám a uvidíme…*

U: Máme dané parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= -4 + t \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jednoducho vylúčime z týchto rovníc parameter t.

Ž: *To by som vedel asi aj ja. Druhú rovnicu vynásobím s číslom* 2 *a obidve rovnice sčítam. Dostávam:*

$$x + 2y = -5.$$

U: A už máme všeobecnú rovnicu!

Ž: *Nejako sa mi ale nepozdáva.*

U: Je potrebné ju ešte upraviť tak, aby na pravej strane bola nula.

Ž: *To asi pripočítam* 5 *a dostávam:*

$$x + 2y + 5 = 0.$$

Naozaj je to tá istá rovnica! Tento postup bol oveľa kratší, asi ho budem požívať aj ja.

U: Mohlo by sa stať, že by sme dostali inú rovnicu? Napríklad takúto:

$$4x + 8y + 20 = 0.$$

Ž: *Znamenalo by to, že sme sa pomýlili? Bola by to rovnica inej priamky?*

U: Neunáhli sa! Poriadne si porovnaj obe rovnice:

$$x + 2y + 5 = 0$$

$$4x + 8y + 20 = 0.$$

Ž: *Naozaj, podobajú sa. Každý koeficient je vynásobený s číslom* 4.

U: Áno. Priamka môže mať nekonečne veľa všeobecných rovníc. Každý nenulový násobok všeobecnej rovnice priamky je tiež jej všeobecnou rovnicou.

Úloha 1: *Priamka je daná parametrickými rovnicami* $x = -5 - t,\ y = 10 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$. *Napíšte jej všeobecnú rovnicu.*

Výsledok: $2x + y = 0$

Príklad 6: *Priamka je daná všeobecnou rovnicou $5x - 3y + 10 = 0$. Napíšte jej parametrické vyjadrenie.*

Ž: *Už viem ako prepíšem parametrické rovnice priamky na rovnicu všeobecnú.*

U: Toto je presne opačná úloha. Daná je všeobecná rovnica priamky a my máme napísať jej parametrické vyjadrenie.

Ž: *Ak som prepisoval parametrické rovnice na všeobecnú, stačilo len odstrániť parameter.*

U: A my si ho teraz naopak vyrobíme.

Ž: *A to sa dá?*

U: Čoby nie. Ak sa dal parameter odstrániť, musí sa dať aj vyrobiť. Nezabudni, že parametrických rovníc jednej priamky existuje nekonečne veľa.

Ž: *Hej. Závisí to od voľby bodu priamky a voľby smerového vektora.*

U: Zvoľme napr.

$$y = t.$$

Ž: *Asi sa opakujem, ale udivuje ma to. Môžeme to len tak urobiť?*

U: Tak sa na to pozrime. Parametrické rovnice priamky v rovine, ako iste vieš, môžeme zapísať takto:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ak si zvolíme $y = t$, bude to vlastne druhá rovnica parametrického vyjadrenia: $y = a_2 + tu_2$.

Ž: *Aha. Porovnám ich a vidím, že potom musí byť*

$$a_2 = 0, \quad u_2 = 1.$$

U: A tu je hneď odpoveď na tvoju otázku, či to môžeme len tak urobiť. Ak priamka nemá nejakú špeciálnu polohu…

Ž: *To myslíte, že nie je rovnobežná s niektorou osou sústavy súradníc?*

U: Presne tak. Takže, ak priamka nemá nejakú špeciálnu polohu, určite na nej existuje bod, ktorého druhá súradnica $a_2 = 0$. Takisto smerových vektorov je nekonečne veľa, takže niektorý z nich bude mať druhú súradnicu $u_2 = 1$.

Ž: *Už tomu asi rozumiem. $y = t$ si môžem jednoducho zvoliť vďaka rozmanitosti parametrických vyjadrení tej istej priamky. Vyberiem si to vyjadrenie, ktoré sa mi najviac hodí.*

U: Celkom si to vystihol, aj keď matematicky presnejšie by bolo vďaka nekonečnému počtu parametrických vyjadrení.

Ž: *To by som si ale pokojne mohol zvoliť aj $x = t$.*

U: Samozrejme. Je to jedno.
Vydiskutovali sme si to, doriešme teraz úlohu. Máme $y = t$.

Ž: *Ešte by sme potrebovali druhú parametrickú rovnicu, tú s x.*

U: Veď my ju vlastne máme, len o nej ešte nevieš. Keďže $y = t$, tak stačí dosadiť do danej všeobecnej rovnice:

$$5x - 3y + 10 = 0.$$

namiesto y parameter t.

Ž: *Dostávame:*

$$5x - 3t + 10 = 0.$$

U: No vidíš, je to rovnica, ktorá obsahuje x aj parameter t. Stačí ju len trochu upraviť do požadovaného tvaru.

Ž: *To myslíte ako x na ľavej strane a na pravej číslo a potom parameter?*

U: Presne tak.

Ž: *No dobre. Na pravú stranu hodím $3t$ a -10:*

$$5x = -10 + 3t.$$

Vydelím s 5:

$$x = \frac{-10 + 3t}{5}.$$

U: Aby bola rovnica v požadovanom tvare, je vhodné rozdeliť zlomok na dva, tak aby sme osamostatnili číslo a násobok parametra:

$$x = -2 + \frac{3}{5}t.$$

Ž: *Naozaj, to už je riadna parametrická rovnica.*

U: Zhrnieme to. Priamka daná všeobecnou rovnicou $5x - 3y + 10 = 0$ má parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} x &= -2 + \frac{3}{5}t \\ y &= t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

U: Na záver si môžeme urobiť malú skúšku správnosti. Overíme, či smerový a normálový vektor priamky sú skutočne kolmé.

Ž: *To by nemal byť problém. Zo všeobecnej rovnici prečítam súradnice normálového vektora, sú to čísla pri x a y. Normalový vektor $\vec{n} = (5; -3)$. Smerový vektor zistím z parametrických rovníc, sú to čísla pri parametri t. Smerový vektor $\vec{u} = (\frac{3}{5}; 1)$.*

U: Výborne. Vypočítame ich skalárny súčin a zistíme, či sú kolmé.

Ž: *Skalárny súčin vypočítam tak, že sčítam súčiny ich prvých a druhých súradníc.*

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 5 \cdot \frac{3}{5} + (-3) \cdot 1 = 3 - 3 = 0.$$

Skalárny súčin vektorov je nula, to znamená, že vektory sú kolmé.

Úloha 1: *Napíšte parametrické vyjadrenie priamky danej rovnicou* $x + 2y - 3 = 0$.

Výsledok: Napr.

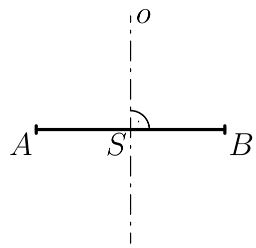
$x = 3 - 2t$

$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$

Príklad 7: *Napíšte všeobecnú rovnicu osi úsečky AB, ak platí: $A[3;-7]$ a $B[-1;-5]$.*

Ž: *Os úsečky... to je taká os, kolmo na úsečku cez jej stred?*

U: V podstate áno. Os úsečky je priamka, ktorá je kolmá na úsečku a prechádza jej stredom. Je to množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od krajných bodov úsečky rovnakú vzdialenosť. Zišiel by sa nejaký obrázok:



U: Aký tvar má všeobecná rovnica priamky?

Ž: *Všeobecná rovnica priamky je táto:*

$$ax + by + c = 0.$$

Na jej napísanie potrebujem normálový vektor - to budú čísla a a b a potom ešte nejaký bod priamky, aby som vedel dopočítať c.

U: Ak sa pozrieme na obrázok, s bodom by nemal byť problém.

Ž: *Veru nie. Použijeme bod S ako stred úsečky AB. Súradnice stredu sú aritmetickým priemerom súradníc krajných bodov úsečky, v našom prípade bodov A a B. Preto:*

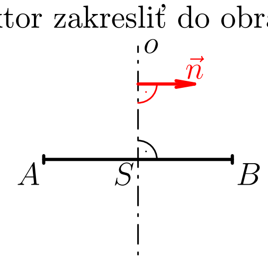
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-7 - 5}{2} = -6.$$

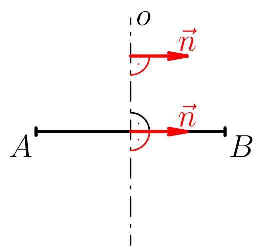
Súradnice bodu S sú

$$S[1;-6].$$

U: Dobre. Ostalo nám vyriešiť problém s normálovým vektorom. Potrebujeme vektor kolmý na os úsečky. Skúsme si taký vektor zakresliť do obrázka.



U: Vektor však môžeme posúvať a umiestniť ho na vhodnejšie miesto. Navrhoval by som na priamku AB.



Ž: *Jasné. Priamka AB je kolmá na os, tak aj vektor na nej umiestnený bude na os kolmý. Ako normálový vektor zoberieme vektor $\vec{n} = B - S$.*

U: Alebo rovno vektor $\vec{n} = B - A$. Priamka má predsa nekonečne veľa normálových vektorov.

Ž: *Vlastne áno, aj vektor $B-A$ je kolmý na os úsečky. Dobre, zoberiem ten. Počítam súradnice normálového vektora*

$$\vec{n} = B - A = (-1-3; -5-(-7)) = (-4; 2).$$

Normálový vektor má súradnice:

$$\vec{n} = (-4; 2).$$

U: Máme už všetko potrebné na napísanie všeobecnej rovnice hľadanej osi úsečky AB. Normálový vektor $\vec{n} = (-4; 2)$ a bod $S[1; -6]$. Všeobecná rovnica vyzerá takto:

$$ax + by + c = 0.$$

Ž: *Najprv dosadím namiesto a a b súradnice normálového vektora, t. j. $a = -4$ a $b = 2$, dostávam:*

$$-4x + 2y + c = 0.$$

Aby som zistil c, dosadím do rovnice súradnice bodu S:

$$-4 \cdot 1 + 2 \cdot (-6) + c = 0.$$

Vypočítam c:

$$-4 - 12 + c = 0,$$

$$c = 16.$$

U: Výborne. Všeobecná rovnica osi úsečky AB je:

$$-4x + 2y + 16 = 0.$$

Povedali sme si už, že priamka má nekonečne veľa všeobecných rovníc.

Ž: *Áno, každý násobok tejto rovnice bude tiež všeobecnou rovnicou osi úsečky.*

U: Každý nenulový násobok! V matematike radi zapisujeme veci, čo najjednoduchšie a najkrajšie. Môžeme si všimnúť, že všetky koeficienty v našej rovnici sú násobkom dvoch.

Ž: *Predelíme rovnicu dvoma a získame „krajšiu“:*

$$-2x + y + 8 = 0.$$

U: Ešte by som navrhoval vynásobiť rovnicu s (-1), mínusy na začiatku väčšinou nemáme radi, lebo na nich môžeme zabudnúť.

Ž: *OK. Tak výsledná verzia všeobecnej rovnice osi úsečky je táto:*

$$2x - y - 8 = 0.$$

Úloha 1: *Napíšte všeobecnú rovnicu osi úsečky KL, ak platí: $K[5; 2]$ a $L[3; -1]$.*

Výsledok: $4x + 6y - 19 = 0$

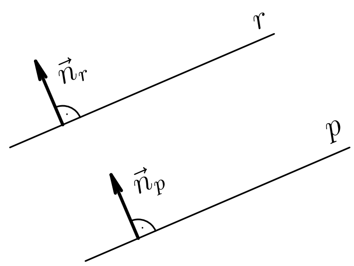
Príklad 8: *Je daná priamka* $p: \ x - 2y + 1 = 0$.

a) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky r*, ktorá je rovnobežná s priamkou* p *a prechádza bodom* $R[0;4]$.

b) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky t*, ktorá je kolmá na priamku* p *a prechádza bodom* $T[1;2]$.

Ž: *Čo zo zadania viem? Priamku* p *máme danú všeobecnou rovnicou. Našou úlohou bude napísať všeobecné rovnice priamok* r *a* t*. K tomu by som potreboval ich normálové vektory a jeden bod, ktorý na nich leží. Bod máme vždy daný. Takže čo urobíme s tými normálovými vektormi?*

U: Začneme postupne, najprv úlohou a). Nakreslime si obrázok. Je na ňom priamka p a priamka r s ňou rovnobežná. Obom priamkam vyznačme normálové vektory, ktoré nazveme príznačne $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_r$.



Ž: *Tie normálové vektory vyzerajú podozrivo rovnaké, len sú na inom mieste.*

U: Nezabúdaj, že sú to vektory, ktoré sa dajú umiestniť aj do inej súhlasne rovnobežnej orientovanej úsečky.

Ž: *Vy chcete asi povedať, že vektor môžem posúvať. No ale to potom môžu mať tieto dve rovnobežné priamky ten istý normálový vektor!*

U: Správne. Práve o to ide. Každý normálový vektor priamky p bude aj normálovým vektorom priamky r.

Ž: *Tak to už úlohu hravo doriešim. Z rovnice priamky* p *si prečítam normálový vektor* $\vec{n}_p = (1; -2)$*. Tieto súradnice dosadím namiesto koeficientov* a *a* b *vo všeobecnej rovnici:*

$$x - 2y + c = 0.$$

U: Rovnobežné priamky majú ten istý smerový vektor, preto ich všeobecné rovnice sa líšia len koeficientom c.

Ž: *Áno, všeobecné rovnice majú rovnaký začiatok. Dosadím teraz bod* $R[0;4]$*, aby som vypočítal* c*:*

$$0 - 2 \cdot 4 + c = 0.$$

Vypočítam

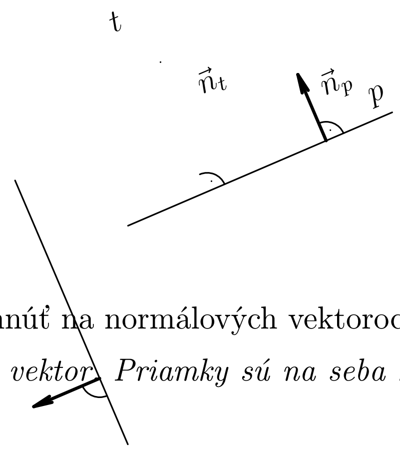
$$c = 8.$$

U: Všeobecná rovnica priamky r je:

$$x - 2y + 8 = 0.$$

Ž: *Budem pokračovať úlohou b). Priamka t má byť na priamku p kolmá.*

U: Opäť si nakreslíme obrázok. A vyznačíme na ňom normálové vektory oboch priamok $\vec{n}_p$ a $\vec{n}_t$.



U: Čo si teraz môžeme všimnúť na normálových vektoroch oboch priamok?

Ž: *Teraz to nebude ten istý vektor. Priamky sú na seba kolmé, tak budú navzájom kolmé aj ich normálové vektory.*

U: Správne. Platí:

$$\vec{n}_p \perp \vec{n}_t.$$

Ž: *Súradnice normálového vektora priamky p poznáme: $\vec{n}_p = (1; -2)$.*

U: Ak sú dva vektory navzájom kolmé, tak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Preto stačí len vymeniť poradie súradníc vektora $\vec{n}_p$, v jednej zmeniť znamienko a máme súradnice normálového vektora priamky t: $\vec{n}_t = (2; 1)$.*

U: Súhlasím.

Ž: *Ďalej budem pokračovať rovnako ako predtým. Dosadím súradnice normálového vektora:*

$$2x + y + c = 0.$$

Dosadím bod $T[1; 2]$, aby som vypočítal c:

$$2 \cdot 1 + 2 + c = 0.$$

Vypočítam

$$c = -4.$$

U: Všeobecná rovnica priamky t je:

$$2x + y - 4 = 0.$$

Úloha 1: *Daná je priamka* $p: \; 5x - 3y + 7 = 0$. *Napíšte všeobecné rovnice troch rôznych priamok, ktoré sú s ňou rovnobežné.*

Výsledok: Napr.
$5x - 3y = 0$
$5x - 3y + 1 = 0$
$5x - 3y + 2 = 0$

Úloha 2: *Daná je priamka* $p: \; 5x - 3y + 7 = 0$. *Napíšte všeobecné rovnice troch rôznych priamok, ktoré sú na ňu kolmé.*

Výsledok: Napr.
$3x + 5y = 0$
$3x + 5y + 1 = 0$
$3x + 5y + 2 = 0$

Príklad 9: *Je daný trojuholník* ABC*, pričom* $A[1;-3]$, $B[-5;7]$ *a* $C[3;11]$. *Napíšte všeobecnú rovnicu priamky,*

a) na ktorej leží strana AB.

b) na ktorej leží výška trojuholníka z bodu C.

Ž: *Úloha a) sa mi vidí jednoduchá. Už som sa s ňou tu niekde stretol, len to nebolo v trojuholníku. Normalový vektor priamky* AB *je kolmý na vektor* $B-A$.

U: Áno. Vektor $B-A$ je vlastne smerovým vektorom priamky AB.

Ž: *Určím si súradnice smerového vektora*

$$\vec{u}=B-A=(-5-1;7-(-3))=(-6;10).$$

U: Potrebujeme normálový vektor, t. j. vektor kolmý na $B-A$. Skalárny súčin kolmých vektorov je rovný nule, preto ...

Ž: *... stačí vymeniť poradie súradníc a* (-6) *zmeniť na* $(+6)$. *Normálový vektor má súradnice:* $\vec{n}=(10;6)$

U: Výborne. Napíšeme všeobecnú rovnicu priamky AB.

Ž: *Do všeobecnej rovnice*

$$ax+by+c=0$$

dosadím súradnice normálového vektora:

$$10x+6y+c=0.$$

Na výpočet c *použijem napr. bod* $A[1;-3]$.

U: Bod A patrí priamke AB, preto jeho súradnice musia vyhovovať rovnici priamky.

Ž: *Po dosadení získavam rovnicu:*

$$10\cdot 1+6\cdot(-3)+c=0.$$

Vypočítam c:

$$c=8.$$

Všeobecná rovnica priamky AB *je:*

$$10x+6y+8=0.$$

Alebo krajšie, po predelení dvoma:

$$5x+3y+4=0.$$

U: To ti išlo výborne.

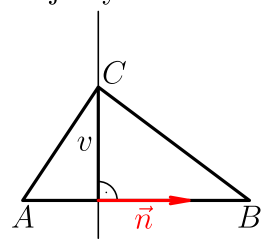
U: Pozrieme sa teraz na úlohu b). Malo by to byť podobné. Len musíme nájsť normálový vektor výšky a aspoň jeden bod, ktorý na nej leží.

Ž: *Ak sa nemýlim, hľadaná výška je kolmica z vrcholu C na protiľahlú stranu. Bod, ktorý na nej leží už máme, je to bod C.*

U: S tým súhlasím. Upresním len, že výška je ***úsečka*** spájajúca vrchol a pätu kolmice z tohto vrchola na protiľahlú stranu. Preto nemáme napísať rovnicu výšky, ale priamky, na ktorej výška leží. Bod teda máme. Ostáva normálový vektor. Navrhujem nakresliť obrázok.

Ž: *Dobre. Kreslím obrázok. Načrtnem ľubovoľný trojuholník ABC, potom výšku z bodu C a predĺžim ju, čím vznikne priamka, na ktorej leží. Normálový vektor je vektor kolmý na výšku, tak ho niekde zakreslím, napr. z bodu C?*

U: Môže byť umiestnený ľubovoľne, ale ja by som navrhol načrtnúť ho na úsečke AB:



Ž: *No jasné! Úsečka AB je kolmá na výšku, tak normálový vektor môže na nej ležať.*

U: A čo keby sme zobrali ako normálový vektor celý vektor $B - A$?

Ž: *Celý vektor $B - A$? Samozrejme, je kolmý na výšku a normálový vektor môže byť ľubovoľne dlhý. Aký geniálny nápad! Máme normálový vektor pre výšku.*

U: Navyše nemusíme nič počítať, lebo jeho súradnice sme vypočítali pred chvíľou.

Ž: *Áno, sú tu:*

$$B - A = (-6; 10).$$

U: Ďalší postup bude rovnaký ako v úlohe a). Nechávam to už na teba.

Ž: *Dobre. Do všeobecnej rovnice*

$$ax + by + c = 0$$

dosadím súradnice normálového vektora:

$$-6x + 10y + c = 0.$$

Na výpočet c *použijem bod* $C[3; 11]$. *Po dosadení získavam rovnicu:*

$$-6 \cdot 3 + 10 \cdot 11 + c = 0.$$

Vypočítam c*:*

$$c = -92.$$

Všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška z bodu C *je:*

$$-6x + 10y - 92 = 0.$$

Alebo krajšie, po predelení mínus dvoma:

$$3x - 5y + 46 = 0.$$