Vzájomná poloha priamky a roviny

RNDr. Viera Vodičková

U: Začneme s opakovaním. Aká môže byť vzájomná poloha priamky a roviny?

Ž: *Hm... Priamka môže byť s rovinou rovnobežná alebo rôznobežná. A môžu byť tiež aj totožné.*

U: Až na to posledné s tebou súhlasím. Priamka môže byť s rovinou rovnobežná alebo rôznobežná. Ale priamka nemôže byť s rovinou totožná!

Ž: *Nie? Môže predsa nastať taký prípad, že celá priamka leží v rovine.*

U: Teraz si to pomenoval správne. Priamka môže ***ležať*** v rovine, alebo môžeme aj povedať, že ***priamka patrí rovine***. Totožnosť má iný význam. Ak sú dva útvary totožné, znamená to, že všetky body prvého útvaru patria druhému útvaru a naopak, všetky body druhého útvaru patria prvému útvaru.

Ž: *Aha. Ak priamka leží v rovine, všetky jej body patria rovine. Ale neplatí, že všetky body roviny patria priamke. To je jasné.*

U: Dobre. Máme dva prípady vzájomnej polohy. Priamka je s rovinou rovnobežná alebo rôznobežná. Ak priamka leží v rovine, hovoríme tiež o rovnobežnosti.
Na základe čoho takto klasifikujeme vzájomnú polohu priamky a roviny?

Ž: *Myslím, že na základe počtu ich spoločných bodov.*

U: Správne. Aký prienik môže mať priamka s rovinou?

Ž: *Môžu sa pretnúť práve v jednom bode, alebo sa nepretnú. A ešte, keď priamka leží v rovine, tak sa pretnú vo všetkých bodoch priamky. To je asi všetko.*

U: Asi? Môže mať priamka s rovinou spoločné práve dva body? Alebo práve tri body?

Ž: *To teda nie! Beriem späť to „asi“. Vyčerpal som už všetky možnosti.*

U: Zhrnieme to.

- Ak prienikom priamky a roviny je prázdna množina (nemajú spoločný bod), priamka je s rovinou ***rovnobežná***, pričom priamka neleží v rovine.
- Ak prienikom priamky a roviny je nekonečne veľa bodov (celá priamka), priamka je s rovinou rovnobežná, pričom ***priamka leží v rovine***.
- Ak prienikom priamky a roviny je práve jeden bod, priamka je s rovinou ***rôznobežná***.

U: Teraz budeme skúmať vzájomnú polohu priamky a roviny z analytického hľadiska.

Ž: *Pomocou vektorov?*

U: Aj. Ale hlavne pomocou ich analytického vyjadrenia.

Ž: *Myslíte rovnice?*

U: Áno. Z rovníc priamky a roviny musíme vedieť určiť, či sú rovnobežné, rôznobežné alebo či priamka leží v rovine. Akou rovnicou vieme vyjadriť priamku v priestore?

Ž: *Priamku v priestore môžeme vyjadriť len parametricky.*

U: Správne. Zopakujme si, že parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach je:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + tu_1\\
y &= a_2 + tu_2\\
z &= a_3 + tu_3, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Čo všetko vieme určiť z parametrických rovníc priamky?

Ž: *Z parametrických rovníc vieme určiť súradnice aspoň jedného bodu priamky, napr. bodu $A[a_1; a_2; a_3]$. Okrem toho aj súradnice smerového vektora priamky, $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$.*

U: Výborne. Pozrieme sa na rovinu. Akou rovnicou vieme vyjadriť rovinu?

Ž: *Rovinu vieme vyjadriť parametricky a všeobecnou rovnicou. Och, to budeme mať prípadov. Všetko bude závisieť od toho, akou rovnicou bude daná rovina!*

U: Iste vieš, že parametrické rovnice roviny sú v podstate tri, vystupujú v nich dva smerové vektory a teda aj dva parametre. Naproti tomu všeobecná rovnica roviny – to je len jedna rovnica. Určite uznáš, že sa s ňou pracuje jednoduchšie. Sústredíme sa preto len na roviny dané všeobecnou rovnicou. V prípade, že by predsa bola rovina zadaná parametricky, mal by si už vedieť prepísať parametrické rovnice roviny na rovnicu všeobecnú.

Ž: *To znamená, že bude len jeden prípad. Priamka zadaná parametricky a rovina zadaná všeobecne.*

U: Povedzme si ešte ako vyzerá všeobecná rovnica roviny.

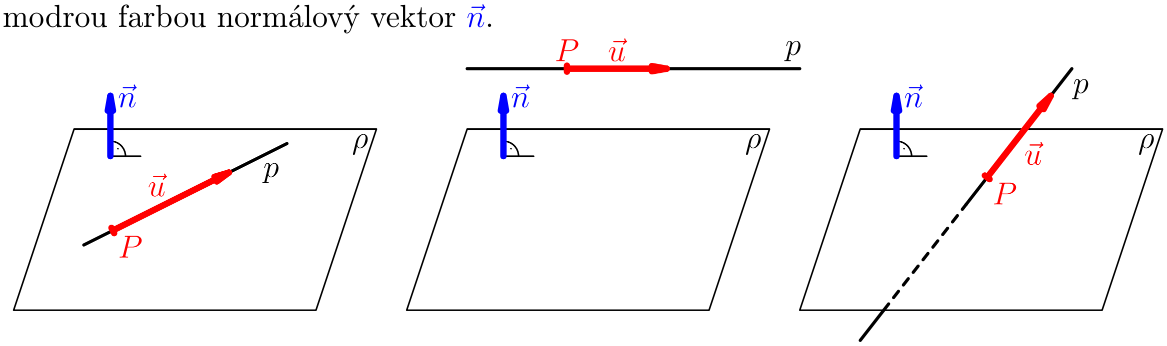
Ž: *Všeobecná rovnica roviny je rovnica typu*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

U: Pričom a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla také, že aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly. Čo vieme vyčítať zo všeobecnej rovnice roviny?

Ž: *Koeficienty a, b, c určujú súradnice normálového vektora roviny, $\vec{n} = (a; b; c)$. Je to vektor kolmý na rovinu.*

U: Nakreslíme si tri obrázky, na ktorých budú postupne znázornené všetky tri prípady vzájomnej polohy priamky p a roviny ϱ. Na prvom obrázku priamka leží v rovine. Na druhom je priamka s rovinou rovnobežná a na treťom je priamka s rovinou rôznobežná. Na priamke p vyznačíme červenou farbou bod P a smerový vektor priamky $\vec{u}$. V rovine ϱ vyznačíme modrou farbou normálový vektor $\vec{n}$.



Na obrázkoch budeme skúmať ako súvisí vzájomná poloha priamky a roviny s umiestnením smerového vektora priamky a normálového vektora roviny.

Ž: *Zatiaľ nevidím nič, čo by mi pomohlo. Je to iné ako pri dvoch priamkach. Na žiadnom obrázku sa nedajú vektory umiestniť na jednu priamku.*

U: To je pravda. Sústreďme sa na prvé dva obrázky. Na oboch je priamka s rovinou rovnobežná, na prvom navyše leží v rovine. Aký vzťah platí medzi smerovým vektorom priamky a normálovým vektorom roviny?

Ž: *Na druhom obrázku, kde je priamka rovnobežná s rovinou to vyzerá tak, akoby mali byť tieto vektory navzájom kolmé.*

U: Výborne. Normálový vektor roviny je kolmý na rovinu. Znamená to, že je kolmý aj na každú priamku patriacu rovine a na každú priamku, ktorá je s rovinou rovnobežná.

Ž: *Ak je kolmý na priamku, tak je kolmý aj na smerový vektor tejto priamky.*

U: Čiže, ak je priamka s rovinou rovnobežná, smerový vektor priamky a normálový vektor roviny sú na seba kolmé.

Ž: *Jasné. Tým by sme mali vybavené prvé dva prípady. Vtedy platí:*

$$\vec{u} \perp \vec{n}.$$

U: Podľa čoho určíme, či sú dva vektory na seba kolmé?

Ž: *Myslím, že to súviselo so skalárnym súčinom.*

U: Správne. Skalárny súčin dvoch navzájom kolmých vektorov je rovný nule. Preto, ak je priamka rovnobežná s rovinou, platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$

Ž: *Ako to bude na treťom obrázku?*

U: V prípade rôznobežnosti smerový vektor priamky nie je kolmý na normálový vektor roviny. Platí:

$$\vec{u} \not\perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0.$$

Ž: *To bolo jednoduché. Ako odlíšime prvé dva prípady? Či priamka leží v rovine alebo je s ňou rovnobežná?*

U: Všimnime si na obrázku bod P patriaci priamke p.

Ž: *Aha! Ak priamka leží v rovine, tak aj bod P patrí rovine ϱ.*

U: Presne tak. Overíme, či bod P patrí rovine ϱ. Ak patrí, tak priamka leží v rovine. A ak nepatrí, tak je priamka s rovinou rovnobežná.

U: Zhrnieme si to. Máme priamku p danú bodom P a smerovým vektorom $\vec{u}$ a rovinu ϱ danú všeobecnou rovnicou, to znamená, že poznáme jej normálový vektor $\vec{n}$. Ak je smerový vektor priamky p kolmý na normálový vektor roviny ϱ, priamka je s rovinou rovnobežná.

Ž: *V prípade, že bod P patriaci priamke p patrí aj rovine ϱ, priamka leží v rovine. Inak priamka v rovine neleží.*

U: Ak smerový vektor priamky p nie je kolmý na normálový vektor roviny ϱ, priamka je s rovinou rôznobežná.

Vzájomná poloha priamky a roviny

$$p(P;\vec{u}),\quad \varrho(\vec{n})$$

- $\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow p \parallel \varrho$
  - $P\in\varrho \Rightarrow p\subset\varrho$
  - $P\notin\varrho \Rightarrow p\not\subset\varrho$
- $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0 \Rightarrow p \nparallel \varrho$

U: Na záver ešte jedna poznámka. Zistiť vzájomnú polohu priamky a roviny môžeme aj inou metódou, bez použitia vektorov. Táto metóda je založená na hľadaní prieniku priamky a roviny.

Ž: *Myslíte spoločných bodov?*

U: Presne tak. Súradnice spoločných bodov priamky a roviny musia vyhovovať tak parametrickým rovniciam priamky ako aj všeobecnej rovnici roviny. Preto vyhovujú sústave štyroch rovníc zloženej z parametrických rovníc priamky a všeobecnej rovnice roviny:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1\\ y &= a_2 + tu_2\\ z &= a_3 + tu_3\\ ax+by+cz+d &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Ako takú sústavu budeme riešiť?*

U: Veľmi jednoducho. Súradnice x, y, z vyjadrené parametrickými rovnicami priamky dosadíme do všeobecnej rovnice roviny. Získame tak jednu rovnicu s neznámou t.

Ž: t *- to je ten parameter?*

U: Áno. Koľko riešení môže mať takáto rovnica?

Ž: *Myslím, že práve jedno, nekonečne veľa alebo žiadne.*

U: Nič ti to nepripomína?

Ž: *No áno... priamka môže mať s rovinou spoločný jeden bod, nekonečne veľa alebo žiaden.*

U: Presne tak. Podľa počtu riešení rovnice, vieme určiť vzájomnú polohu. Výhodou je aj to, že ak je priamka s rovinou rôznobežná, máme hneď aj určené súradnice ich priesečníka.

Príklad 1: *Určte vzájomnú polohu*
priamky $p: x = 1 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = 2 + 4t;\ t \in \mathbb{R}$
a roviny $\varrho: x + 2y + 3z - 1 = 0.$

U: Vzájomnú polohu priamky a roviny môžeme určiť dvoma spôsobmi. Buď sa sústredíme na vektory, ktoré určujú priamku a rovinu, alebo určíme prienik priamky a roviny.

Ž: *Vektory sa mi veľmi nepáčia, skúsil by som ten prienik.*

U: Dobre. Potrebujeme určiť prienik priamky a roviny. Znamená to, nájsť body, ktorých súradnice vyhovujú parametrickým rovniciam priamky p ako aj všeobecnej rovnici roviny ϱ.

Ž: *Rozumiem. Treba vyriešiť sústavu rovníc. Všetky rovnice dáme dohromady.*

U: Áno. Vytvoríme sústavu štyroch rovníc zloženej z parametrických rovníc priamky a všeobecnej rovnice roviny. Tu je

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 - t \\ z &= 2 + 4t \\ x + 2y + 3z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Ako ju vyriešiť?*

U: Celkom jednoducho. Len sa na to poriadne pozri. Priam sa nám núka dosadiť vyjadrenia pre x, y, z z parametrických rovníc priamky do rovnice roviny.

Ž: *Máte pravdu. Dosadzujem*

$$(1 + 2t) + 2(-3 - t) + 3(2 + 4t) - 1 = 0.$$

U: Získali sme jednu rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *To vyzerá jednoducho. Vyriešim ju. Upravím najprv ľavú stranu, roznásobím zátvorky*

$$1 + 2t - 6 - 2t + 6 + 12t - 1 = 0,$$

sčítam čo sa dá

$$12t = 0.$$

Z toho je jasné, že

$$t = 0.$$

U: Výborne. Rovnica má práve jedno riešenie $t = 0$. Čo to znamená pre vzájomnú polohu priamky a roviny?

Ž: *Riešenie je len jedno, aj prienik priamky a roviny bude len jeden. Sú rôznobežné.*

U: Správne. Ak by rovnica nemala riešenie, priamka by bola s rovinou rovnobežná. A ak by rovnica mala nekonečne veľa riešení, priamka by ležala v rovine.

Ž: **Priamka p je s rovinou ϱ rôznobežná.** *Dal by sa niekde vyčítať aj ich priesečník?*

U: Samozrejme. Súradnice priesečníka už vlastne máš. Stačí dosadiť vypočítanú hodnotu parametra $t = 0$ do parametrických rovníc priamky p.

Ž: *To mi mohlo napadnúť. Hneď to urobím. Dosadzujem $t = 0$ do parametrických rovníc priamky p:*

$$x = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$
$$y = -3 - 0 = -3$$
$$z = 2 + 4 \cdot 0 = 2.$$

Priesečník priamky p a roviny ϱ *má súradnice* $P[1; -3; 2]$.

U: Určenie vzájomnej polohy pomocou prieniku bolo jednoduché a hravo si to zvládol. Napriek tomu si ukážeme ešte druhý spôsob. Sústredíme sa teraz na vektory.

Ž: *No dobre. Z parametrických rovníc priamky p viem prečítať jej smerový vektor. Je to vektor so súradnicami $\vec{u} = (2; -1; 4)$. Zo všeobecnej rovnice roviny ϱ viem prečítať súradnice jej normálového vektora. Je to vektor $\vec{n} = (1; 2; 3)$.*

U: Výborne. Vzájomná poloha priamky a roviny závisí od toho, či tieto dva vektory budú na seba kolmé.

Ž: *Ak budú kolmé, tak je priamka s rovinou rovnobežná.*

U: Áno. Dva vektory sú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Uf! To by som si mal pamätať, ako sa počíta skalárny súčin! To nebolo ťažké. Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

U: Správne.

Ž: *Skalárny súčin vektorov $\vec{u} = (2; -1; 4)$ a $\vec{n} = (1; 2; 3)$ je:*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 2 - 2 + 12 = 12.$$

U: Skalárny súčin nie je rovný nule. ***Priamka je s rovinou rôznobežná.***

Ž: *Bolo to krátke. Nezískali sme však súradnice priesečníka priamky a roviny.*

U: To máš úplnu pravdu.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamky $p: x = 4 - t,\ y = 8 - 3t,\ z = 3 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$ a roviny $\varrho: 2x - 7y + z - 5 = 0$.*

Výsledok: $p \parallel \varrho$

Príklad 2: *Určte vzájomnú polohu priamky* $\overleftrightarrow{AB}$ *a roviny* ϱ*, ak platí:* $A[1;-4;-1]$, $B[7;-4;1]$, $\varrho\colon x+2y-3z+4=0$.

U: Máme určiť vzájomnú polohu priamky a roviny. Trochu ťa vyskúšam. Aká môže byť vzájomná poloha priamky a roviny?

Ž: *Priamka môže byť s rovinou rovnobežná alebo rôznobežná.*

U: V prípade rovnobežnosti môže priamka v rovine ležať. Ako analyticky určíme vzájomnú polohu priamky a roviny?

Ž: *Potrebovali by sme analytické vyjadrenia, čiže rovnice priamky aj roviny. Rovnicu roviny máme danú. Rovnicu priamky budeme musieť vytvoriť.*

U: Napísať parametrické vyjadrenie priamky určenej dvoma bodmi je, samozrejme, jednoduchá vec. Napriek tomu to nebudeme potrebovať.

Ž: *Nie? Asi budeme pracovať len s vektormi.*

U: Presne tak. Na určenie vzájomnej polohy priamky a roviny potrebujeme smerový vektor priamky a normálový vektor roviny.

Ž: *Normálový vektor roviny môžem rovno prečítať zo všeobecnej rovnice roviny. Sú to čísla pri* x, y, z. *Normálový vektor roviny* ϱ *má súradnice* $\vec{n}=(1;2;-3)$.

U: Správne.

U: Ani so smerovým vektorom priamky by nemal byť problém. Máme predsa dané súradnice dvoch rôznych bodoch priamky, $A[1;-4;-1]$, $B[7;-4;1]$.

Ž: *Jasné. Smerovým vektorom priamky je vektor* $\vec{u}=B-A$ *a má súradnice*

$$\vec{u}=B-A=(7-1;-4-(-4);1-(-1))=(6;0;2).$$

U: Výborne. Vzájomná poloha priamky a roviny závisí od toho, či tieto dva vektory sú na seba kolmé.

Ž: *Ak sú kolmé, tak je priamka s rovinou rovnobežná. A ak nie, tak je priamka s rovinou rôznobežná.*

U: Áno. Pripomeniem, že dva vektory sú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Uf! To by som si mal pamätať, ako sa počíta skalárny súčin! To nebolo ťažké. Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

U: Správne.

Ž: *Skalárny súčin vektorov* $\vec{u}=(6;0;2)$ *a* $\vec{n}=(1;2;-3)$ *je:*

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=6\cdot1+0\cdot2+2\cdot(-3)=6+0-6=0.$$

Skalárny súčin je rovný nule. Priamka je s rovinou rovnobežná.

U: V poriadku. Ostáva nám určiť, či priamka leží v rovine alebo neleží.

Ž: *Tak predsa budeme potrebovať rovnicu priamky!*

U: Ani nie. Vieme už, že priamka je s rovinou rovnobežná. Koľko môžu mať spoločných bodov?

Ž: *Ak priamka leží v rovine, tak všetky, teda nekonečne veľa. Ak priamka v rovine neleží, tak nemajú žiaden spoločný bod.*

U: Ak o jednom bode priamky, napr. bode A, zistíme, že patrí rovine, čo to bude znamenať?

Ž: *Ak majú jeden spoločný bod, môžu byť rôznobežné ...*

U: Počkaj! Zabudol si, že musia byť rovnobežné.

Ž: *Jáj! No potom neostáva nič iné, ibaže musia mať spoločné aj všetky ostatné body!*

U: Presne tak. Ak teda vyskúšam, či bod A patrí rovine, zistím, či priamka leží v rovine alebo nie.

Ž: *Pochopil som. Zístím, či súradnice bodu $A[1; -4; -1]$ vyhovujú rovnici roviny*

$$x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Dosadím súradnice a zistím, či platí rovnosť:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) + 4 &= 0 \\ 1 - 8 + 3 + 4 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Rovnosť platí.

U: Výborne. Bod A patrí rovine ϱ. Znamená to, že ***priamka $\overleftrightarrow{AB}$ leží v rovine ϱ***.

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamky $p: x = 2t,\ y = 4 + t,\ z = -1;\ t \in \mathbb{R}$ a roviny $\varrho : x - 2y - 3z + 5 = 0$.*

Výsledok: $p \subset \varrho$

Príklad 3: *Určte vzájomnú polohu priamky*
p: $x = -3 + t,\ y = 5 - 2t,\ z = t;\ t \in \mathbb{R}$
a roviny α: $x = 1 - r + 3s,\ y = 7 + 2r - s,\ z = -3 - r + s;\ r, s \in \mathbb{R}$.

Ž: *Pozerám, že rovina je daná parametrickými rovnicami. Viem určiť vzájomú polohu len pomocou jej všeobecnej rovnice.*

U: Nemal by pre teba byť problém napísať všeobecnú rovnicu roviny, ak poznáš jej parametrické vyjadrenie.

Ž: *Snáď to zvládnem.*

U: Tvojou úlohou bude odstrániť z rovníc parametre.

Ž: *Dobre. Mám parametrické rovnice*

$$\begin{aligned} x &= 1 - r + 3s \\ y &= 7 + 2r - s \\ z &= -3 - r + s, \quad r, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Najprv si z jednej rovnice vyjadrím parameter r *a dosadím ho do zvyšných dvoch rovníc.*

U: S tým súhlasím.

Ž: *Vybral som si prvú rovnicu*

$$x = 1 - r + 3s.$$

Vyjadrím si z nej parameter r*:*

$$r = 1 + 3s - x.$$

U: Výborne. Toto vyjadrenie dosadíme do zvyšných rovníc.

Ž: *Dostávame už len dve rovnice s jedným parametrom* s*:*

$$\begin{aligned} y &= 7 + 2(1 + 3s - x) - s \\ z &= -3 - (1 + 3s - x) + s. \end{aligned}$$

U: Navrhujem rovnice ešte trochu upraviť.

Ž: *Dobre. Upravím pravé strany. Odstránim zátvorky a sčítam, čo sa dá. Dostaneme tieto rovnice:*

$$\begin{aligned} y &= 9 - 2x + 5s \\ z &= -4 + x - 2s. \end{aligned}$$

U: Parameter s odstránime použitím sčítacej metódy.

Ž: *Rozumiem. Prvú rovnicu vynásobím dvoma a druhú piatimi. Potom ich sčítam. Dostanem rovnicu*

$$2y + 5z = 18 - 20 - 4x + 5x.$$

Upravím ju a máme rovinu vyjadrenú všeobecnou rovnicou

$$x - 2y - 5z - 2 = 0.$$

$$\begin{aligned} y &= 9 - 2x + 5s \quad / \cdot 2 \\ z &= -4 + x - 2s \quad / \cdot 5 \\ \hline 2y + 5z &= 18 - 20 - 4x + 5x \end{aligned}$$

$$\alpha: \ x - 2y - 5z - 2 = 0$$

U: Výborne. Vzájomnú polohu priamky a roviny určíme pomocou ich prieniku.

Ž: *Potrebujeme teda určiť prienik priamky a roviny.*

U: Znamená to, nájsť body, ktorých súradnice vyhovujú parametrickým rovniciam priamky p ako aj všeobecnej rovnici roviny α.

Ž: *Rozumiem. Treba vyriešiť sústavu rovníc. Všetky rovnice dáme dohromady.*

U: Áno. Vytvoríme sústavu štyroch rovníc zloženú z parametrických rovníc priamky a všeobecnej rovnice roviny. Tu je

$$\begin{aligned} x &= -3 + t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= t \\ x - 2y - 5z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ž: *Ako ju vyriešiť?*

U: Celkom jednoducho. Len sa na to poriadne pozri. Priam sa nám núka dosadiť vyjadrenia pre x, y, z z parametrických rovníc priamky do rovnice roviny.

Ž: *Máte pravdu. Dosadzujem*

$$(-3 + t) - 2(5 - 2t) - 5t - 2 = 0.$$

U: Získali sme jednu rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *To vyzerá jednoducho. Vyriešim ju. Upravím najprv ľavú stranu, roznásobím zátvorky*

$$-3 + t - 10 + 4t - 5t - 2 = 0,$$

sčítam čo sa dá

$$-15 = 0.$$

t vypadlo. Keďže $-15 \neq 0$, rovnica nemá riešenie.

U: Rovnica nemá riešenie. Čo to znamená pre vzájomnú polohu priamky a roviny?

Ž: *Riešenie nie je. Preto prienikom priamky a roviny je prázdna množina. Sú rovnobežné.*

U: Výborne. ***Priamka p je rovnobežná s rovinou α, pričom priamka v rovine neleží.***

Úloha 1: *Určte vzájomnú polohu priamky* p*:* $x = 4 + 5t,\ y = 3 - 5t,\ z = 1 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$ *a roviny* α*:* $x = 2 - r + 3s,\ y = 3r - 4s,\ z = 7 + 2r;\ r, s \in \mathbb{R}$.

Výsledok: $p \parallel \varrho \wedge p \not\subset \varrho$

Príklad 4: *Určte hodnotu parametra b tak, aby priamka p: $x = 6 - t$, $y = 1 + bt$, $z = 2 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$ bola s rovinou $\varrho : x + 2y - z - 10 = 0$ rôznobežná.*

Ž: *Úlohy s parametrami nemám veľmi rád.*

U: Nič sa neboj. Spoľahni sa vždy na to, čo vieš. Priamka má byť s rovinou rôznobežná. Aký vzťah musí platiť medzi smerovým vektorom priamky a normálovým vektorom roviny?

Ž: *Ak je priamka s rovinou rovnobežná, tak tieto vektory sú na seba kolmé. Je to preto, že normálový vektor roviny je kolmý na rovinu aj na všetky priamky s touto rovinou rovnobežné. Z toho vyplýva, že ak je priamka s rovinou rôznobežná, tak smerový vektor priamky nesmie byť kolmý na normálový vektor roviny.*

U: Výborná úvaha. A správna. Poďme na to. Aké súradnice majú jednotlivé vektory?

Ž: *Z parametrických rovníc priamky p prečítam jej smerový vektor. Je to vektor so súradnicami*

$$\vec{u} = (-1; b; -2).$$

To b sa mi tam veľmi nepáči. Zo všeobecnej rovnice roviny ϱ prečítam súradnice normálového vektora. Je to vektor

$$\vec{n} = (1; 2; -1).$$

U: Výborne. Potrebujeme určiť parameter b tak, aby tieto dva vektory neboli na seba kolmé.

Ž: *Bude to nejako súvisieť so skalárnym súčinom.*

U: Správne! Dva vektory sú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Teda, ak skalárny súčin dvoch vektorov nie je nula, vektory nie sú na seba kolmé. Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

U: Súhlasím.

Ž: *Skalárny súčin vektorov $\vec{u} = (-1; b; -2)$ a $\vec{n} = (1; 2; -1)$ je:*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 \cdot 1 + b \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = -1 + 2b + 2 = 1 + 2b.$$

U: Skalárny súčin nesmie byť rovný nule. Má platiť:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0.$$

Čiže

$$1 + 2b \neq 0.$$

Ž: *Z toho dostávame*

$$b \neq -\frac{1}{2}.$$

U: Priamka p je s rovinou ϱ rôznobežná, ak hodnota parametra $b \neq -\frac{1}{2}$. To znamená, že $b \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

Úloha 1: *Určte hodnoty parametrov a, b tak, aby priamka*
p: $x = a - t,\ y = 1 + bt,\ z = 2 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$ ležala v rovine $\varrho : x + 2y - z - 10 = 0$.

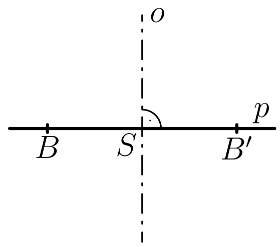
Výsledok: $b = -\frac{1}{2} \wedge a = 10$

Príklad 5: *Určte súradnice bodu B', ktorý je obrazom bodu $B[2; -3; 6]$ v osovej súmernosti podľa osi o: $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = 2t$; $t \in \mathbb{R}$.*

Ž: *Osovú súmernosť poznám z geometrie. Netušil som, že sa s ňou stretnem aj tu, pri vektoroch.*

U: Analytická geometria je predsa tiež geometria. Len rieši geometrické úlohy rovnicami, namiesto pravítkom.

Ž: *Narysovať by to bolo jednoduché. Mám bod B a os. Zostojil by som kolmicu na os prechádzajúcu bodom B. A v rovnakej vzdialenosti od osi vznikne bod B', samozrejme na druhej strane. Načrtol som aj obrázok.*



U: Tvoj popis síce nebol matematicky presný, ale spolu s obrázkom si to vysvetlil pekne. Túto situáciu budeme riešiť analyticky.

Ž: *Asi nám nič iné ani neostáva. Máme parametrickú rovnicu osi o a súradnice bodu B.*

U: Áno. Budeme kopírovať postup, ktorý by si použil pri rysovaní. Čo si urobil ako prvé?

Ž: *Zostrojil som kolmicu na os prechádzajúcu cez bod B.*

U: Označme ju napr. p. My ju nezostrojíme, ale určíme ju prostredníctvom rovnice. Potrebujeme rovnicu priamky p.

Ž: *Aha. Takú situáciu som už niekde videl. Priamky o a p sú na seba kolmé. To znamená, že smerový vektor priamky o, ktorý poznáme, bude normálovým vektorom priamky p.*

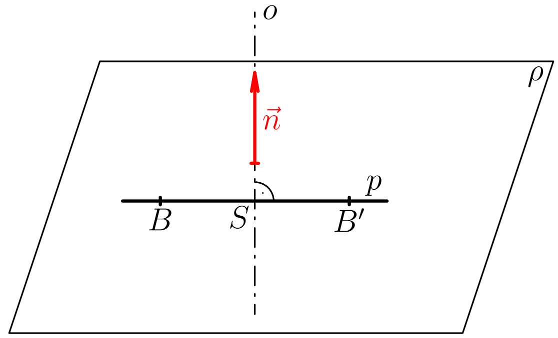
U: To je všetko pekné. Má to však jeden háčik. Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu a teda ani normálový vektor.

Ž: *Och! Zabudol som, že sme v priestore. Tak...smerový vektor priamky p vyrobíme. Má byť kolmý na smerový vektor priamky o. To nebude problém.*

U: Ale bude. Je to stále ten istý problém. V priestore existuje na daný vektor nekonečne veľa kolmých vektorov. A nie sú lineárne závislé.

Ž: *Už si spomínam. Kvôli tomu sa nedal normálový vektor priamky jednoznačne definovať, a teda neexistuje. Čo ale budeme teraz robiť?*

U: Ak potrebujeme zostrojiť z daného bodu kolmicu na priamku, v stereometrii sa často používa zostrojenie nie kolmej priamky ale kolmej roviny. Skrátka, bodom B preložíme rovinu ϱ kolmú na os o. Sleduj ďalší obrázok.



Potrebujeme teraz rovnicu roviny ϱ. Tu už budeme môcť uplatniť to, čo si si všimol o smerovom a normálovom vektore.

Ž: *Rovina ϱ je kolmá na os o. Preto smerový vektor priamky o sa môže rovnať normálovému vektoru roviny ϱ. Jeho súradnice prečítam z parametrických rovníc priamky o. Sú to čísla stojace pri parametri t. Platí:*

$$\vec{u_o} = \vec{n_\varrho} = (-1; 1; 2).$$

U: Dobre. Máme normálový vektor roviny ϱ. Jej všeobecná rovnica vyzerá takto:

$$-x + y + 2z + d = 0.$$

Ž: *Musíme ešte dopočítať d.*

U: Potrebujeme poznať súradnice aspoň jedného bodu, ktorý rovine ϱ patrí.

Ž: *Máme predsa bod B! Jeho súradnice $B[2; -3; 6]$ dosadím do všeobecnej rovnice a dopočítam d:*

$$-2 - 3 + 2 \cdot 6 + d = 0$$
$$d = -7.$$

Všeobecná rovnica roviny ϱ je

$$-x + y + 2z - 7 = 0.$$

U: Výborne. Máme rovinu kolmú na os o. Ako by sme pokračovali rysovaním?

Ž: *Preniesli by sme bod B na „druhú stranu“ v rovnakej vzdialenosti.*

U: Je mi jasné, čo chceš povedať tou „druhou stranou“. Na určenie rovnakej vzdialenosti od osi o potrebujeme ale bod S. Je to priesečník roviny ϱ a osi o. Určme jeho súradnice.

Ž: *Mám určiť priesečník priamky o*

$$x = 2 - t$$
$$y = 3 + t$$
$$z = 2t$$

a roviny

$$\varrho : -x + y + 2z - 7 = 0.$$

U: Áno. Treba vyriešiť sústavu týchto rovníc.

U: Vyjadrenia pre x, y, z z parametrických rovníc priamky dosadíme do rovnice roviny.

Ž: *Dosadzujem*

$$-(2-t)+(3+t)+2\cdot 2t-7=0.$$

U: Získali sme jednu rovnicu s jednou neznámou t.

Ž: *Tú hravo vyriešim. Upravím najprv ľavú stranu*

$$-2+t+3+t+4t-7=0,$$

sčítam čo sa dá

$$6t-6=0.$$

Z toho je jasné, že

$$t=1.$$

U: Výborne. Ako získame súradnice bodu S?

Ž: *Stačí dosatiť vypočítanú hodnotu $t=1$ do parametrických rovníc priamky o:*

$$\begin{aligned} x &= 2-1=1 \\ y &= 3+1=4 \\ z &= 2\cdot 1=2. \end{aligned}$$

Priesečník priamky o a roviny ϱ je bod $S[1;4;2]$.

U: Ostala nám posledná úloha. Určiť súradnice bodu B'. Stačí si všimnúť, že bod S je stredom úsečky BB'.

Ž: *Využijeme asi to, že súradnice stredu úsečky sú aritmetickým priemerom súradníc jej krajných bodov.*

U: Správne. Som rád, že si si na to spomenul.

Ž: *Urobím to spamäti. Súradnice bodu B sú $[2;-3;6]$ a súradnice bodu S sú $[1;4;2]$. Bod B' bude druhý krajný bod úsečky so stredom v bode S. Pozriem sa na prvé súranice. Prvá súradnica bodu B je 2 a prvá súradnica bodu S je 1. Od čísla 2 je k číslu 1 jeden dielik. Preto pridám jeden dielik na druhú stranu od čísla 1 a mám číslo 0. Prvá súradnica bodu B' bude 0. Podobne dopočítam ostatné súradnice. Bod B' má súradnice*

$$B'[0;11;-2].$$

U: Výborne.

Úloha 1: *Určte súradnice bodu C', ktorý je obrazom bodu $C[1;0;2]$ v rovinovej súmernosti podľa roviny ϱ: $x-2y-z+13=0$.*

Výsledok: $C'[-3;8;6]$

Príklad 6: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 4 cm. Určte analyticky vzájomnú polohu priamky $\overleftrightarrow{FG}$ a roviny $\overleftrightarrow{BRU}$, pričom bod R je stred hrany AE a bod U stred hrany DH.*

Ž: *Uf! To je normálna úloha zo stereometrie. Nikde žiadne súradnice, vektory ani rovnice.*

U: Práve o to ide. Úloha sa dá riešiť klasicky ale aj analytickou metódou. Analyticky sa neriešia len úlohy, kde už máme dané rovnice roviny a priamky. Práve naopak. Musíme dokázať aj klasickú geometrickú úlohu preniesť do sveta analytickej geometrie.

Ž: *Znamená to, že rovnice priamky a roviny si budeme musieť určiť sami.*

U: Samozrejme. Na to však potrebujeme poznať súradnice jednotlivých bodov.

Ž: *Žiadne nemáme.*

U: Tak si zavedieme súradnicovú sústavu. Podľa možnosti tak, aby sa nám počítalo, čo najjednoduchšie.

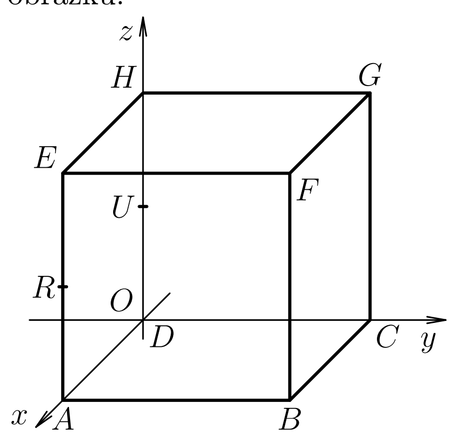
Ž: *Mám kocku a tú si umiestnim v sústave súradníc. Samozrejme v trojrozmernej, čiže v priestore. Asi bude najjednoduchšie umiestniť vrchol D do začiatku sústavy súradníc. Teda*

$$D[0;0;0].$$

U: Áno. To si zvolil šikovne. Dodám ešte, že spodná podstava kocky bude ležať v súradnicovej rovine xy. Hrana AD leží na osi x a hrana CD na osi y.

Ž: *Aha, a hrana DH na osi z.*

U: Všetko je zakreslené aj na obrázku.



U: Kocka má hranu 4 cm. Zoberme ako jeden dielik 1cm. Napr. bod F bude mať súradnice

$$F[4;4;4].$$

Ž: *Dobre. Tak ja určím súradnice ostatných vrcholov kocky.*

U: Pozor. Aby si sa zbytočne neunavoval, urči súradnice len tých vrcholov, ktoré potrebujeme.

Ž: *Máme určiť vzájomnú polohu priamky* $\overleftrightarrow{FG}$ *a roviny* $\overleftrightarrow{BRU}$*. Potrebujem súradnice piatich bodov:* F, G, B, R, U*. Bod* F *ste mi už určili. Z obrázka je jasné, že bod* G *má súradnice*

$$G[0;4;4].$$

Podobne bod B

$$B[4;4;0].$$

U: Ostávajú ešte body R, U. To nie sú vrcholy kocky.

Ž: *Mohol by som určiť súradnice ostatných vrcholov kocky a súradnice bodov* R, U *pomocou súradníc stredu úsečky.*

U: Áno, to by bol správny postup. Ale, keď sa pozrieš na obrázok, uvidíš to aj bez počítania.

Ž: *No jasné! Bod* R *je „nad“ bodom* A *vo výške* 2 *dieliky. Má súradnice*

$$R[4;0;2].$$

Podobne bod U *je „nad“ bodom* D *vo výške* 2 *dieliky. Má preto súradnice*

$$U[0;0;2].$$

U: Výborne. Tým sme úlohu zmenili na analytickú. Môžeme sa pustiť do určovania vzájomnej polohy priamky $\overleftrightarrow{FG}$ a roviny $\overleftrightarrow{BRU}$.

Ž: *Mali by sme asi vytvoriť rovnicu priamky* $\overleftrightarrow{FG}$ *a potom rovnicu roviny* $\overleftrightarrow{BRU}$*.*

U: Nebude to potrebné. Pri určení vzájomnej polohy priamky a roviny si vystačíme len s vektormi. Potrebujeme smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{FG}$ a normálový vektor roviny $\overleftrightarrow{BRU}$.

Ž: *So smerovým vektorom priamky by nemal byť problém. Máme predsa súradnice dvoch rôznych bodoch priamky,* $F[4;4;4]$ *a* $G[0;4;4]$*. Smerovým vektorom priamky je vektor* $\vec{u} = G - F$ *a má súradnice*

$$\vec{u} = G - F = (0-4;4-4;4-4) = (-4;0;0).$$

U: Výborne. Teraz rovina. Normálový vektor hneď neurčíme. Porebujeme najprv dva smerové vektory roviny.

Ž: *Je to rovina* $\overleftrightarrow{BRU}$*. Smerové vektory budú* $\vec{v} = R-B$ *a* $\vec{w} = U-B$*. Vypočítam ich súradnice. Bod* $B[4;4;0]$ *a bod* $R[4;0;2]$*. Súradnice vektora* $\vec{v}$ *vypočítam ako rozdiel súradníc bodov* R *a* B*. Preto:*

$$\vec{v} = R - B = (4-4;0-4;2-0) = (0;-4;2).$$

Nasleduje druhý vektor $\vec{w} = U - B$*. Bod* $U[0;0;2]$ *a bod* $B[4;4;0]$*. Súradnice vektora* $\vec{w}$ *sú:*

$$\vec{w} = U - B = (0-4;0-4;2-0) = (-4;-4;2).$$

U: Pomocou smerových vektorov určíme vektor normálový.

Ž: *Normálový vektor je kolmý na rovinu...*

U: . . . a teda aj na všetky vektory v nej ležiace.

Ž: *Dobre. Normálový vektor je kolmý na smerové vektory. Ako získam vektor kolmý na iné dva vektory?*

U: Spomeň si na vektorový súčin.

Ž: *Jasné! Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor na ne kolmý. Vypočítam vektorový súčin smerových vektorov $\vec{v}$ a $\vec{w}$ a mám normálový vektor $\vec{n}$.*

U: Na výpočet súradníc vektorového súčinu máme pomôcku. Zapíšeme súradnice vektorov pekne pod seba. . .

Ž: *. . . pridáme ešte raz prvú a druhú súradnicu. Áno, poznám to.*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -4 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -4 \end{array}$$

A počítam. Prvá súradnica: $-4 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) = -8 + 8 = 0.$
Druhá súradnica: $2 \cdot (-4) - 0 \cdot 2 = -8 - 0 = -8.$
A nakoniec tretia súradnica: $0 \cdot (-4) - (-4) \cdot (-4) = 0 - 16 = -16.$
Normálový vektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ *má súradnice* $\vec{n} = (0; -8; -16)$.

U: Výborne. Vzájomná poloha priamky a roviny závisí od toho, či smerový vektor priamky a normálový vektor roviny sú na seba kolmé.

Ž: *Ak sú kolmé, tak je priamka s rovinou rovnobežná. A ak nie, tak je priamka s rovinou rôznobežná.*

U: Áno. Pripomeniem, že dva vektory sú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin je rovný nule.

Ž: *Uf! To by som si mal pamätať ako sa počíta skalárny súčin! To nebolo ťažké. Skalárny súčin dvoch vektorov vypočítam tak, že vynásobím ich prvé súradnice, k tomu pripočítam súčin ich druhých súradníc a nakoniec ešte súčin ich tretích súradníc, teda*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

U: Správne.

Ž: *Skalárny súčin vektorov* $\vec{u} = (-4; 0; 0)$ *a* $\vec{n} = (0; -8; -16)$ *je:*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-8) + 0 \cdot (-16) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

U: Skalárny súčin je rovný nule. ***Priamka $\overleftrightarrow{FG}$ je s rovinou $\overleftrightarrow{BRU}$ rovnobežná.***
Pri bežnej úlohe by sme potrebovali vyriešiť, či priamka v rovine leží alebo neleží.

Ž: *To je teraz jasné. Pozriem na obrázok a vidím, že napr. bod F rozhodne nemôže patriť rovine $\overleftrightarrow{BRU}$. Priamka nemôže ležať v rovine.*

U: S tým súhlasím.

Úloha 1: *Daná je kocka $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 4 cm. Určte analyticky vzájomnú polohu priamky $\overleftrightarrow{AG}$ a roviny $\overleftrightarrow{KLM}$, pričom bod K je stred hrany AE, bod L stred hrany AB a bod $M \in FG$ tak, že platí $|MF| = 3|GM|$.*

Výsledok: sú rovnobežné