Nepriama úmernosť

RNDr. Beáta Vavrinčíková

Ž: *Dnes som takmer zmeškal do školy. Uviazli sme v zápche a vliekli sa slimačím tempom. To, čo inokedy prejdeme za 10 minút, nám trvalo skoro pol hodiny.*

U: S tým mám tiež svoje skúsenosti. Tvoj ranný zážitok však môžeme využiť na uvedenie dnešnej témy.

Ž: *Budeme hovoriť o stresoch a nervákoch?*

U: To nie, ale budeme hovoriť o jednej konkrétnej funkcii. A tá popisuje napríklad aj závislosť času, ktorý potrebujeme na prejdenie cesty z domu do školy v závislosti od toho, akou rýchlosťou ideme. Ako ďaleko to máš z domu do školy?

Ž: *Asi* 20 *kilometrov.*

U: Tak zostav tabuľku závislosti času, potrebného na prejdenie tejto vzdialenosti, od priemernej rýchlosti auta.

Ž: *Z fyziky viem, že závislosť medzi dráhou s, rýchlosťou v a časom t je daná vzťahom*

$$s = vt.$$

Odtiaľ pre čas platí

$$t = \frac{s}{v}.$$

Ak by sme išli autom maximálnou povolenou rýchlosťou $90\,km/h$, *na prejdenie* $20\,km$ *by sme potrebovali čas* $\frac{2}{9}$ *hodiny. Pri rýchlosti* $60\,km/h$ *by to bola* $\frac{1}{3}$ *hodiny, pri rýchlosti* $40\,km/h$ *už* $\frac{1}{2}$ *hodiny. A keby sme išli ako dnes ráno rýchlosťou* $20\,km/h$, *trvalo by nám to hodinu.*

U: Aby to bolo prehľadnejšie, v tabuľke v rámčeku sú tieto čísla zachytené.

v [km/h]	90	60	40	20
t [h]	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Porovnaj posledné dva stĺpčeky.

Ž: *Rýchlosť auta sa dvakrát zmenšila, zo* 40 *na* $20\,km/h$. *Čas sa ale dvakrát zväčšil, z* $\frac{1}{2}$ *na celú hodinu. Podobné niečo platí aj medzi druhým a štvrtým stĺpčekom – tu sa rýchlosť trikrát zmenšila, zatiaľ čo čas sa trikrát zväčšil.*

U: Výborne, práve o toto nám pôjde. Ak pre dve veličiny platí, koľkokrát sa zmenší jedna veličina, toľkokrát sa zväčší druhá, tak hovoríme, že tieto veličiny sú nepriamo úmerné. To, čo pritom ostáva konštantné, je ich súčin. V našej ukážke je vždy rovnaký súčin rýchlosti a času, ktorý predstavuje dráhu 20 km. Preto rovnica bola v tvare

$$t = \frac{20}{v}.$$

Ž: *Takže to, čo je konštantné, máme v čitateli zlomku.*

U: V praktických úlohách na využitie nepriamej úmernosti pracujeme iba s kladnými hodnotami. Nemá význam uvažovať o zápornej rýchlosti alebo dráhe. Ak však pripustíme aj záporné hodnoty, získame novú funkciu, ktorú nazývame nepriama úmernosť. Vo všeobecnosti ju vyjadrujeme rovnicou

$$y = \frac{k}{x}.$$

Číslo k nazývame koeficient nepriamej úmernosti. Môže to byť akékoľvek nenulové reálne číslo.

Ž: *Keď sa tak dívam na rovnicu, tak x môže byť tiež len nenulové reálne číslo. Pretože je v menovateli a tam nesmieme dosadiť nulu.*

U: Tým si vlastne určil definičný obor nepriamej úmernosti. Zhrniem definíciu:
Nepriamou úmernosťou nazývame každú funkciu danú rovnicou

$$f : y = \frac{k}{x},$$

kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Definovaná je na množine $\mathbb{R} - \{0\}$.
Nepriama úmernosť je špeciálnym prípadom mocninovej funkcie.

Ž: *Ako vyzerá jej graf?*

U: To hneď zistíme. Zostrojíme graf nepriamej úmernosti s rovnicou

$$f : y = \frac{1}{x}.$$

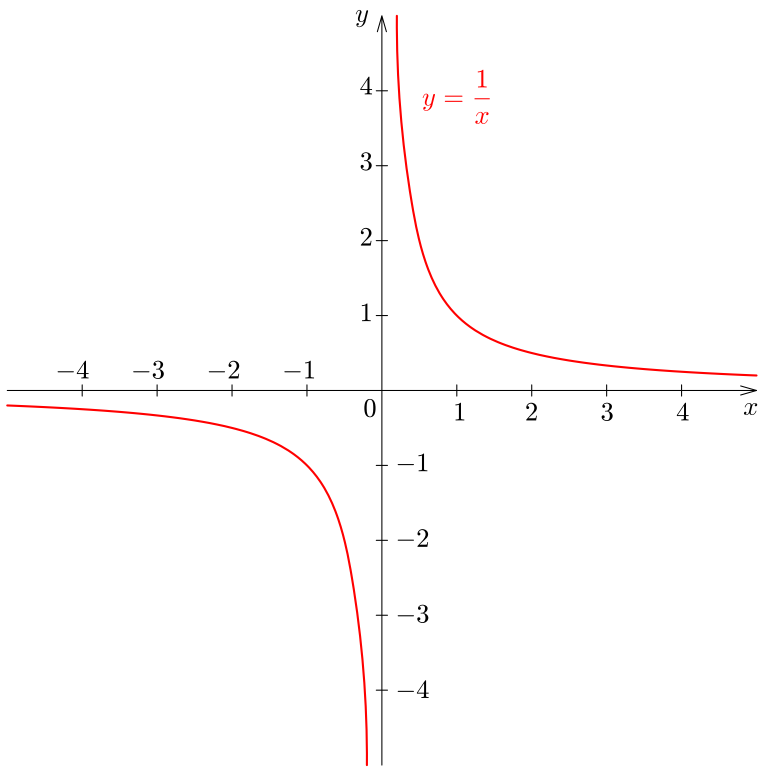
Ž: *Pripravím si tabuľku s niekoľkými hodnotami.*

U: Odporúčam dať do nej aj záporné hodnoty, aj čísla z okolia nuly.

Ž: *Nech je po vašom, tabuľka vyzerá takto:*

x	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$y = \frac{1}{x}$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$	$0{,}25$

U: Ak tieto hodnoty nanesieme do súradnicovej sústavy a pospájame, vznikne nám graf ako na obrázku:



Takýto graf nazývame hyperbola. Skladá sa z dvoch častí, dvoch vetiev. Pomocou grafu môžeš určiť vlastnosti tejto funkcie.

Ž: *Funkcia je klesajúca na intervaloch* $(-\infty; 0)$ *a* $(0; \infty)$. *Nemá extrémy a nie je ani ohraničená. Je nepárna a prostá. Čo ešte?*

U: Zabudol si na obor hodnôt.

Ž: *Tak táto funkcia nadobúda ako hodnoty všetky nenulové reálne čísla.*

U: Pozrime sa ešte na polohu grafu voči súradnicovým osiam.

Ž: *Graf sa približuje k obom osiam, ale nikdy sa ich nedotkne.*

U: Presne tak. Osi y-ovej sa nedotkne preto, lebo nepriama úmernosť nie je definovaná pre $x = 0$. Osi x-ovej sa nedotkne preto, lebo prevrátená hodnota reálneho čísla nebude nikdy rovná nule. V takomto prípade hovoríme, že súradnicové osi predstavujú asymptoty hyperboly.

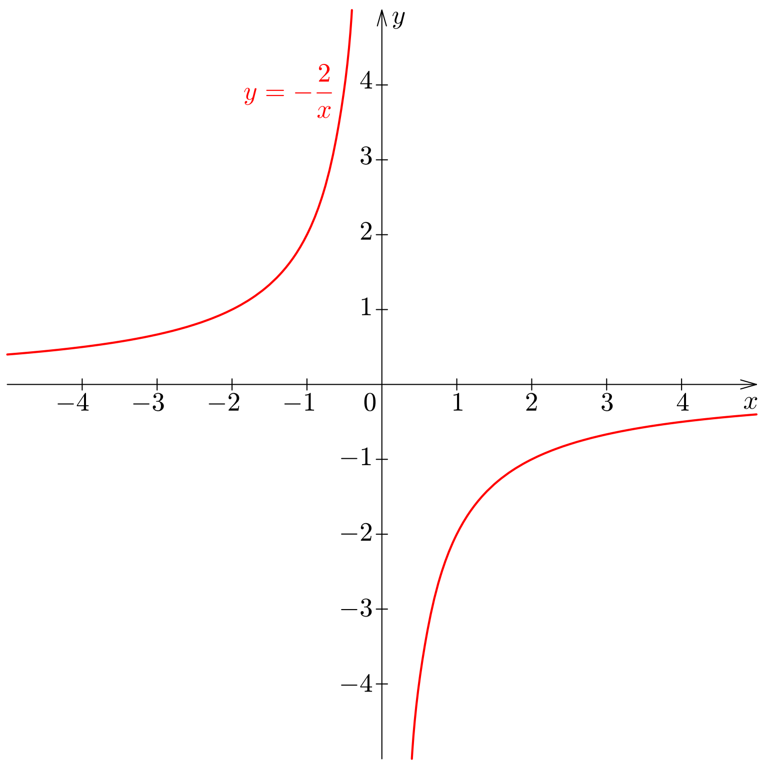
U: Koeficient nepriamej úmernosti môže byť aj záporné číslo. Pozrime sa, či to nejako ovplyvní tvar grafu a vlastnosti funkcie. Zostroj preto graf funkcie

$$y = \frac{-2}{x}.$$

Ž: *Tak najprv tabuľka s niekoľkými hodnotami:*

x	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$y = \frac{-2}{x}$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1	$-0{,}5$

Ak nanesiem hodnoty do súradnicovej sústavy, vyjde mi trochu iný graf. Myslím ale, že je to tiež hyperbola:



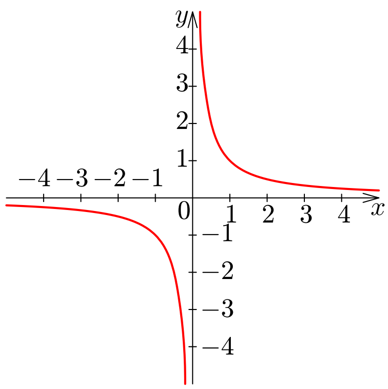
U: Áno, je to tiež hyperbola. Tentoraz sa jej vetvy nenachádzajú v I. a III. kvadrante, ale v II. a IV. Nájdeš ešte aj nejakú inú odlišnosť?

Ž: *Táto nepriama úmernosť je na intervaloch* $(-\infty; 0)$ *a* $(0; \infty)$ *rastúca. Myslím, že ostatné vlastnosti sa nezmenili.*

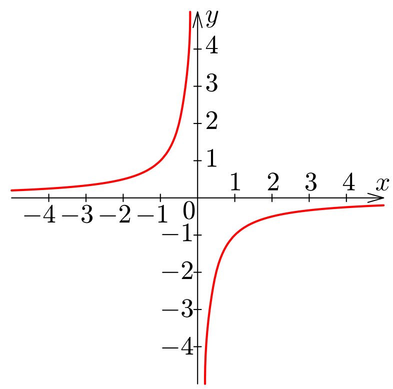
U: V nasledujúcom prehľade v rámčeku sú zhrnuté všetky vlastnosti nepriamej úmernosti tak pre kladný, ako aj pre záporný koeficient k.

Vlastnosti nepriamej úmernosti $y = \dfrac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$k > 0$



$k < 0$



$k > 0$	$k < 0$
1. grafom je hyperbola;	1. grafom je hyperbola;
2. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$;	2. definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$;
3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{0\}$;	3. obor hodnôt $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{0\}$;
4. nepárna;	4. nepárna;
5. je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$;	5. je rastúca na $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$;
6. nemá extrémy;	6. nemá extrémy;
7. nie je ohraničená;	7. nie je ohraničená;
8. je prostá;	8. je prostá;
9. súradnicové osi sú asymptoty grafu.	9. súradnicové osi sú asymptoty grafu.

Príklad 1: *Z nasledujúcich príkladov vyberte tie, v ktorých sú veličiny vo vzťahu nepriamej úmernosti:*
a) šírka obdĺžnika a dĺžka obdĺžnika pri nemeniacom sa obsahu obdĺžnika;
b) dĺžka strany štvorca a veľkosť jeho obvodu;
c) počet výhercov a výška výhry pri konštantnej sume určenej na všetky rovnaké výhry spolu;
d) vek človeka a jeho hmotnosť.

U: Najprv si pripomeňme, čo je to nepriama úmernosť.

Ž: *Nepriamou úmernosťou nazývame funkciu danú rovnicou*

$$y = \frac{k}{x},$$

kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Jej definičným oborom je množina* $\mathbb{R} - \{0\}$.

U: Ja len doplním, že pri praktických úlohách je zvyčajne definičný obor iný.

Ž: *Áno, napríklad nemá zmysel uvažovať o zápornom čase alebo veku.*

U: Presne tak. Budeme preto uvažovať iba o kladných číslach. Pri riešení našej úlohy si môžeme pomôcť aj tým, že pre nepriamo úmerné veličiny platí: kolkokrát sa zväčší jedna veličina, toľkokrát sa zmenší druhá veličina.

Ž: *Začnem prvou dvojicou. Mám posúdiť, či sú nepriamo úmerné šírka a dĺžka obdĺžnika pri nemeniacom sa obsahu. Myslím, že áno, pretože koľkokrát dlhší bude obdĺžnik, toľkokrát bude musieť byť užší, aby sa obsah nezmenil.*

U: Vedel by si to zapísať aj rovnicou?

Ž: *Pre obsah obdĺžnika platí vzťah*

$$S = a \cdot b,$$

kde a *je dĺžka,* b *je šírka. My vyjadrujeme dĺžku pomocou šírky vzťahom*

$$a = \frac{S}{b}.$$

U: A to už je rovnica nepriamej úmernosti, kde rolu koeficienta k preberá S a rolu premennej x preberá b.

Ž: *V časti b) sa hovorí o dĺžke strany štvorca a veľkosti jeho obvodu. Tu zase poznám vzorec*

$$o = 4 \cdot a,$$

v ktorom o *je obvod,* a *je strana štvorca. Ak zväčším stranu štvorca, zväčší sa aj obvod, teda tieto veličiny nie sú nepriamo úmerné.*

U: Pre úplnosť môžeme dodať, že sú vo vzťahu priamej úmernosti.

Ž: *Idem na časť c) – počet výhercov a výška výhry pri konštantnej sume určenej na všetky výhry spolu. Ak tomu dobre rozumiem, tak si majú výhercovia rovnakým dielom rozdeliť výhru, napríklad* 1000 **e**. *Lenže čím viac ich bude, tým menej sa každému z nich ujde.*

U: Presnejšie by bolo povedať, že koľkokrát viac ich bude, toľkokrát menej sa každému z nich ujde. Teda ide o nepriamu úmernosť. Ostala ti posledná časť - porovnať vek človeka a jeho hmotnosť.

Ž: *Tak tu určite neexistuje nejaký vzorec, ktorý by platil rovnako na všetkých.*

U: A určite neplatí, že dvakrát starší človek je dvakrát ľahší, teda tu veličiny nie sú nepriamo úmerné.

Úloha 1: *Z nasledujúcich príkladov vyberte tie, v ktorých sú veličiny vo vzťahu nepriamej úmernosti:*
a) rýchlosť lietadla a čas jeho letu pri konštantnej vzdialenosti;
b) veľkosť polomeru a dĺžka kružnice;
c) dĺžka strany štvorca a veľkosť jeho obsahu;
d) hmotnosť jedného pomaranča a počet pomarančov na kg (predpokladáme, že pomaranče sú rovnaké).

Výsledok: a), d)

Príklad 2:

1. *Určte rovnicu nepriamej úmernosti, ak jej graf prechádza bodom* $[-3; 5]$.

2. *Určte koeficient nepriamej úmernosti a v tabuľke doplňte chýbajúce hodnoty premenných:*

x	-2	-1	1	2			
$y = \frac{k}{x}$				2,4	9,6	1	1,6

Ž: *V prvej časti mám určiť rovnicu nepriamej úmernosti, ale poznám len jeden bod na grafe. Dá sa to vôbec? Veď aj na priamku potrebujem aspoň dva body!*

U: Isteže sa to dá. Grafom nepriamej úmernosti je síce krivka – hyperbola, ale tá má presne určený tvar. Na jej určenie naozaj stačí jeden bod. Začni od rovnice nepriamej úmernosti.

Ž: *Nepriama úmernosť je funkcia s rovnicou*

$$y = \frac{k}{x}.$$

Číslo k predstavuje koeficient nepriamej úmernosti a môže to byť akékoľvek nenulové číslo. Tuším mi začína svitať. Keďže neznámy je tu iba jeden koeficient, na jeho určenie stačí jedna rovnica. A tú získam dosadením daného bodu.

U: Som rád, že si na to prišiel. Takže súradnice daného bodu $[-3; 5]$ dosadíme do rovnice nepriamej úmernosti.

Ž: *Dostanem rovnicu*

$$5 = \frac{k}{-3},$$

odkiaľ

$$k = -15.$$

U: Preto hľadaná rovnica nepriamej úmernosti je

$$y = \frac{-15}{x}.$$

Ž: *V druhej časti mám určiť koeficient nepriamej úmernosti. V tabuľke však veľa údajov chýba. Vlastne poriadne poznám iba jednu dvojicu: $x = 2$ a $y = 2{,}4$. Poučený z predchádzajúcej časti už viem, že mi to stačí. Treba len tieto hodnoty dosadiť do rovnice nepriamej úmernosti. Vznikne mi rovnica*

$$2{,}4 = \frac{k}{2}.$$

Odtiaľ získam hodnotu koeficienta

$$k = 4{,}8.$$

U: Toto si zvládol výborne, ostáva ti ešte doplniť tabuľku.

Ž: *To už teraz bude hračka, pretože ak mám koeficient, tak rovnica nepriamej úmernosti je*

$$y = \frac{4{,}8}{x}.$$

Stačí len dosadzovať a vypočítať chýbajúce hodnoty. Tu je výsledok:

x	-2	-1	1	2	$0{,}5$	$4{,}8$	3
$y = \frac{4{,}8}{x}$	$-2{,}4$	$-4{,}8$	$4{,}8$	$2{,}4$	$9{,}6$	1	$1{,}6$

Úloha 2: *Určte rovnicu nepriamej úmernosti, ak jej graf prechádza bodom* $[8; 2]$.

Výsledok: $y = \dfrac{16}{x}$

Príklad 3: *Daná je funkcia* $f: y = -\dfrac{3}{x}$.

a) Určte $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(-4)$.

b) Určte všetky hodnoty premennej x*, pre ktoré platí* $f(x) = 0,5$, $f(x) = 0$, $f(x) = -2$.

c) Pomocou grafu funkcie určte intervaly, v ktorých sú funkčné hodnoty menšie než $0{,}5$.

U: Daná je funkcia

$$f: y = -\frac{3}{x}.$$

Ku ktorému typu funkcií by si ju zaradil?

Ž: *Toto je určite nepriama úmernosť s koeficientom* -3*. Je definovaná pre všetky reálne čísla okrem nuly. V prvej časti úlohy mám vypočítať hodnoty v niekoľkých bodoch. Nie je medzi nimi nula, tak jednoducho dosadím dané čísla do predpisu funkcie.*

U: Uvažuješ veľmi dobre.

Ž: *Dosadzujem*

$$f(0{,}5) = -\frac{3}{0{,}5} = -6,$$

$$f(1) = -\frac{3}{1} = -3,$$

$$f(-4) = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

U: V poriadku. V druhej časti ťa čaká opačná úloha – dané sú funkčné hodnoty, máš nájsť odpovedajúce hodnoty premennej x.

Ž: *Ak mám zistiť, pre ktoré* x *platí*

$$f(x) = 0{,}5,$$

tak to zapíšem v tvare

$$-\frac{3}{x} = 0{,}5.$$

To je jednoduchá rovnička, z ktorej dostanem výsledok

$$x = -6.$$

Podobne zvládnem aj ďalšie dve časti. Najprv

$$f(x) = 0,$$

čiže

$$-\frac{3}{x} = 0.$$

Hops, tu je nejaká zrada! To nemôže nastať.

U: Veru nie, pretože obor hodnôt nepriamej úmernosti je množina všetkých nenulových reálnych čísel. Odpoveď preto bude, že neexistuje x z definičného oboru danej funkcie, pre ktoré by platilo $f(x) = 0$.

Ž: *Skúsim ešte posledné*

$$f(x) = -2.$$

Prepíšem do tvaru

$$-\frac{3}{x} = -2,$$

odkiaľ

$$x = \frac{3}{2}.$$

U: V poslednej časti úlohy máš pracovať s grafom funkcie

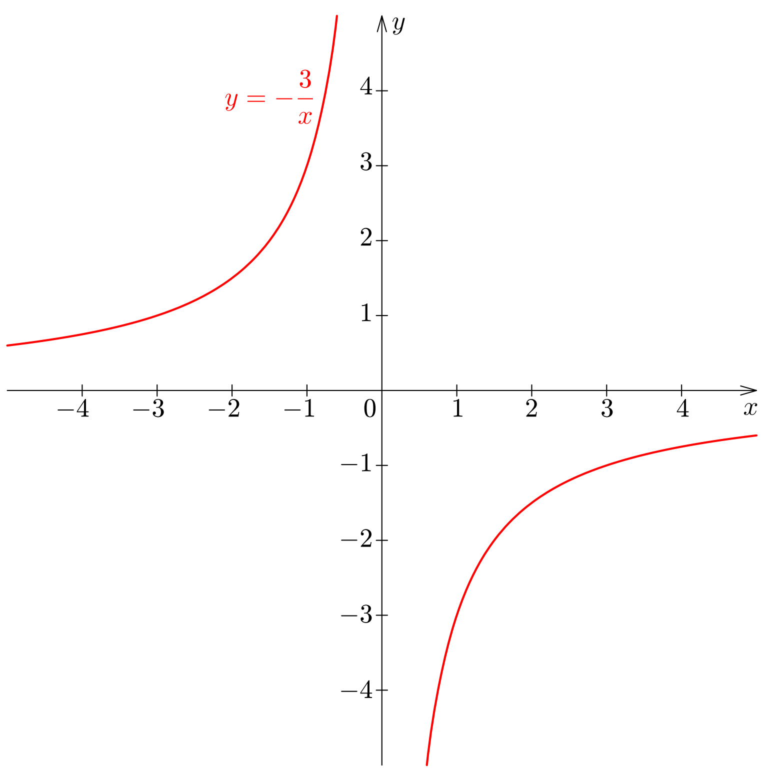
$$f : y = -\frac{3}{x}.$$

Skús ho najprv popísať.

Ž: *Grafom nepriamej úmernosti je hyperbola. V tejto funkcii je koeficient záporný, preto hyperbola bude ležať v II. a IV. kvadrante. Prechádzať bude napríklad všetkými bodmi, ktoré sme vypočítali pred chvíľou. Aby to bolo prehľadnejšie, v rámčeku sú uvedené v tabuľke.*

x	0,5	1	-4	-6	1,5
$y = -\frac{3}{x}$	-6	-3	0,75	0,5	-2

U: Na nasledujúcom obrázku je graf našej nepriamej úmernosti.



U: Pomocou grafu máš určiť všetky hodnoty premennej x, pre ktoré platí

$$f(x) < 0{,}5.$$

Ž: *Pre kladné x je to jasné. Všetky funkčné hodnoty sú záporné čísla, preto sú menšie ako $0{,}5$. Pre záporné x to už nie je také jednoduché. Malé hodnoty nadobúda funkcie úplne vľavo.*

U: Pripomeniem ti, čo si pred chvíľou vypočítal – hodnotu $0{,}5$ nadobudne funkcia v bode $x = -6$.

Ž: *Aha, funkcia je tu rastúca, preto hodnoty menšie ako $0{,}5$ nadobudne pre $x < -6$.*

U: Na záver zapíš poriadne výsledok.

Ž: *Funkcia nadobúda hodnoty menšie ako $0{,}5$ pre všetky*

$$x \in (-\infty; -6) \cup (0; \infty).$$

Úloha 3: *Daná je funkcia $f : y = \dfrac{4}{x}$.*
a) Určte $f(2)$, $f(-5)$.
b) Určte všetky hodnoty premennej x, pre ktoré platí $f(x) = 2$, $f(x) = -8$.
c) Pomocou grafu funkcie určte intervaly, v ktorých sú funkčné hodnoty menšie než 1.

Výsledok: a) 2, $-\frac{4}{5}$; b) 2, $-\frac{1}{2}$; c) $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

Príklad 4: *Nájdite predpis funkcie f, vyjadrujúcej*

a) závislosť počtu otáčok n kolesa s priemerom d na dráhe $s = 200\,m$;

b) závislosť tlaku plynu od jeho objemu pri stálej teplote, ak pri tlaku $p = 1\,MPa$ má objem $V = 2{,}5\,\ell$.

Ž: *Na dráhe $s = 200\,m$ sa otáča koleso. Čím je koleso väčšie, tým menej krát sa potrebuje otočiť, aby prešlo tento úsek. Preto si myslím, že medzi počtom otáčok a priemerom kolesa je vzťah nepriamej úmernosti.*

U: Súhlasím, nájdi jej predpis.

Ž: *Keď sa koleso otočí raz, prejde dráhu rovnú jeho obvodu*

$$o = 2\pi r,$$

alebo ešte lepšie

$$o = \pi d.$$

Ak chcem teraz zistiť, koľkokrát sa otočí na dráhe s, vydelím dráhu obvodom:

$$n = \frac{s}{o}.$$

Po dosadení dostanem výsledok v tvare

$$f : n = \frac{200}{\pi d}.$$

U: Veľmi dobre.

Ž: *S druhou časťou mi budete musieť pomôcť. Mám nájsť závislosť tlaku plynu od jeho objemu pri stálej teplote. Určite sme to na fyzike mali, ale kto si má pamätať všetky vzorce...*

U: A pritom často stačí použiť zdravý sedliacky rozum. Máš napríklad v balóne uzavretý plyn. Predpokladáme, že jeho teplota sa nemení. Balón stlačíš, teda zmenšíš objem plynu v balóne. Ako sa podľa teba zmení tlak?

Ž: *Myslím, že sa zväčší. Molekuly plynu budú mať k dispozícii menší priestor, preto budú častejšie narážať do balóna i do seba navzájom. Ak balón stláčam, tak v rukách cítim ten protitlak.*

U: Výborne. Prišli sme na to, že zmenšenie objemu vyvolá zväčšenie tlaku.

Ž: *To vyzerá na nepriamu úmernosť.*

U: Presne tak. Aby sme nezabudli na fyziku, tak sa to volá Boylov-Mariottov zákon pre izotermický dej s ideálnym plynom stálej hmotnosti. Je vyjadrený rovnicou

$$p = \frac{k}{V},$$

kde p je tlak a V je objem plynu.

Ž: *Ale čomu sa rovná koeficient k?*

U: Pre každý plyn je iný. Pre ten náš ho zistíme zo zadania.

Ž: *Jasné, je tam napísané, že pri tlaku $p = 1\,MPa$ má plyn objem $V = 2{,}5\,\ell$. Môžem to dosadiť, dostanem rovnicu*

$$1 = \frac{k}{2{,}5}.$$

Odtiaľ

$$k = 2{,}5.$$

U: Treba dať ale pozor na jednotky, vo fyzike sa nezvykne používať liter ako jednotka objemu, ale m^3. Pritom platí

$$1\ell = 1\,dm^3 = 0{,}001\,m^3.$$

Prevedieme

$$2{,}5\,MPa \cdot \ell = 2\,500\,000\,Pa \cdot 0{,}001\,m^3 = 2500\,Pa \cdot m^3.$$

Môžeme napísať odpoveď: tlak plynu závisí od jeho objemu podľa vzťahu

$$p = \frac{k}{V},$$

kde $k = 2500\,Pa \cdot m^3$.

Úloha 4: *Stavebná jama s objemom V je úplne naplnená dažďovou vodou. Pomocou čerpadla chceme všetku vodu z jamy vyčerpať. Určte funkciu, ktorá udáva závislosť času t, potrebného k vyčerpaniu jamy od objemovej rýchlosti čerpania vody x.*

Výsledok: $t = \frac{V}{x}$, $x \in (0; \infty)$

Príklad 5: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = \dfrac{3}{x}$*. Pomocou neho zostrojte grafy funkcií* $g : y = -\dfrac{3}{x}$, $h : y = \left|\dfrac{3}{x}\right|$ *a* $i : y = \left|-\dfrac{3}{x}\right|$.

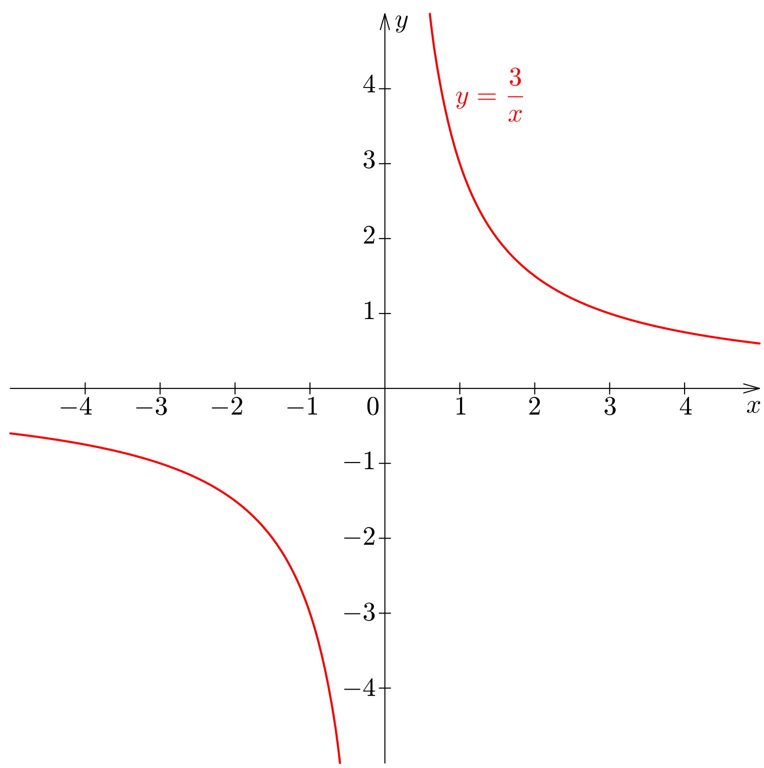
U: Na úvod máš zostrojiť graf funkcie

$$f : y = \frac{3}{x}.$$

Ž: *Je to nepriama úmernosť, jej grafom je hyperbola. Aby som ju vedel zostrojiť, pripravím si tabuľku s niekoľkými hodnotami:*

x	-6	-3	-1	1	3	6
$y = \frac{3}{x}$	$-0{,}5$	-1	-3	3	1	$0{,}5$

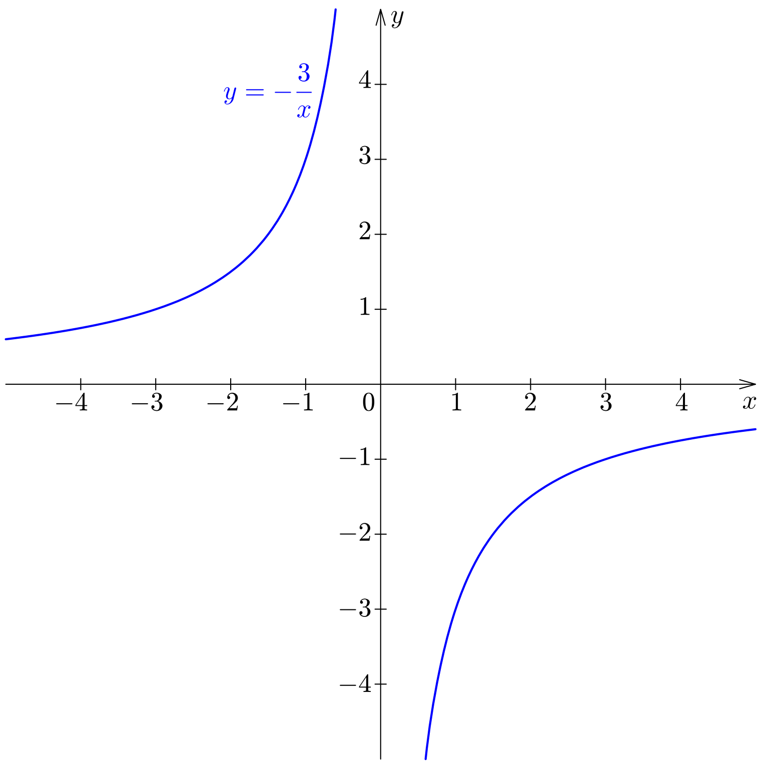
Body zostrojím v súradnicovej sústave, spojím do hyperboly. Výsledok je na obrázku:



U: Zvládol si to veľmi dobre. Teraz bez toho, aby si chystal ďalšiu tabuľku, zostroj graf funkcie

$$g : y = -\frac{3}{x}.$$

Ž: *Zmena je iba v znamienku mínus. To spôsobí, že všetky hodnoty funkcie* f *sa zmenia na opačné čísla. Čo bolo kladné, bude záporné a naopak. Preto sa celý graf zobrazí osovo súmerne podľa osi* x*-ovej. Výsledok je na nasledujúcom obrázku:*



U: Výborne, ostávajú ti ešte funkcie s absolútnymi hodnotami.

Ž: *Graf funkcie*

$$h : y = \left|\frac{3}{x}\right|$$

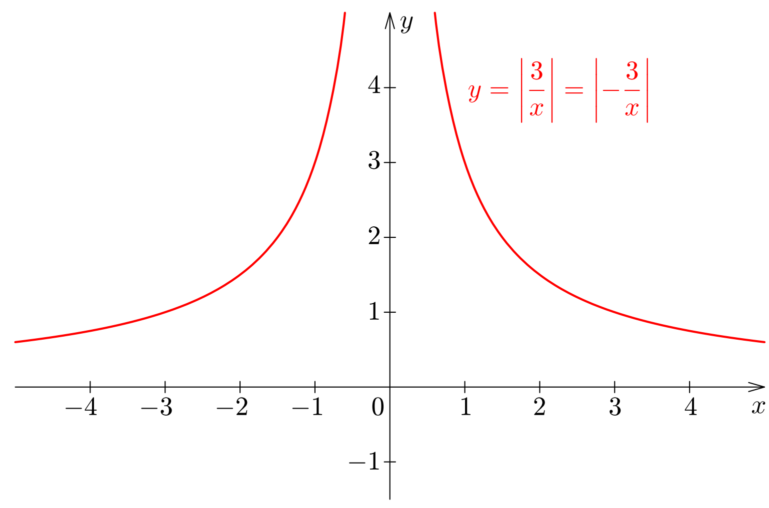
zostrojím pomocou grafu funkcie f tak, že tá časť grafu, ktorá ležala nad osou x sa nezmení. Ale tá časť, ktorá ležala pod osou x, sa zobrazí osovo súmerne podľa osi x-ovej. To preto, lebo absolútna hodnota kladného čísla je to isté číslo, ale absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné.

U: Uvažuješ správne, pokračuj.

Ž: *To isté spravím aj v prípade funkcie*

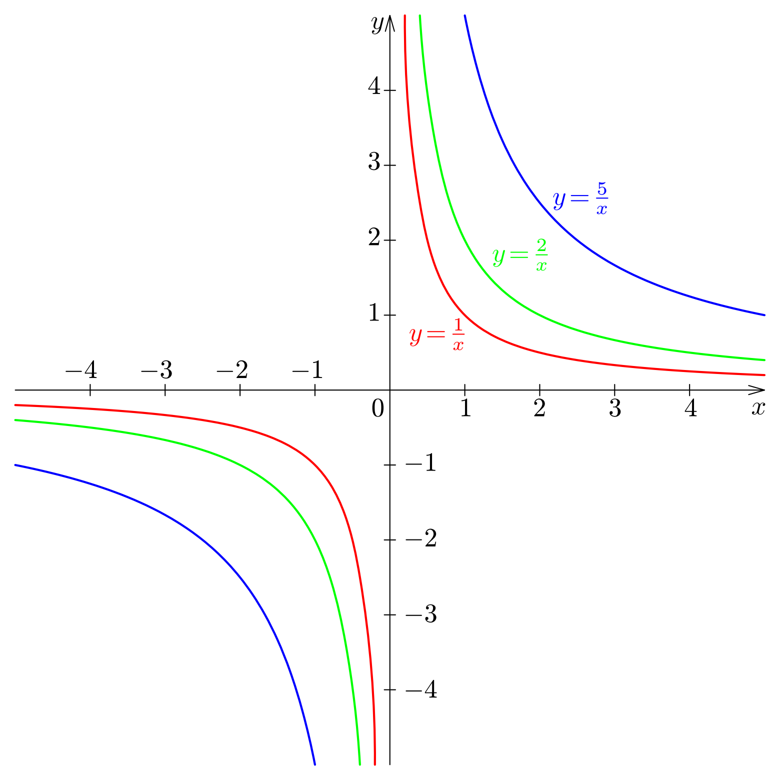
$$i : y = \left|-\frac{3}{x}\right|.$$

Ale ak sa nemýlim, konečný výsledok bude rovnaký, pretože tieto funkcie h a i sa vlaste rovnajú. Tu je graf:



Úloha 5: *V jednej súradnicovej sústave zostrojte grafy funkcií* $f : y = \dfrac{1}{x}$, $g : y = \dfrac{2}{x}$ *a* $h : y = \dfrac{5}{x}$.

Výsledok:



Príklad 6: *Zistite, či je niektorou z uvedených tabuliek určená nepriama úmernosť. Ak áno, zapíšte jej rovnicu.*

a)

x	1	4	5	-6	-2
y	12	3	2,4	-3	-6

b)

x	-6	-4	1	6	9
y	-6	-9	36	6	4

U: Predpokladajme, že prvá tabuľka predstavuje nepriamu úmernosť. Čo by to znamenalo?

Ž: *To by znamenalo, že medzi druhým a prvým riadkom existuje jednoduchý vzťah*

$$y = \frac{k}{x},$$

kde k predstavuje koeficient nepriamej úmernosti.

U: Vedeli by sme ten koeficient nejako určiť?

Ž: *Možno by som mohol zobrať prvú dvojicu čísel a pomocou nich ho vypočítať.*

U: Dobre, urob to.

Ž: *Do rovnice $y = \frac{k}{x}$ dosadím 1 a 12, teda*

$$12 = \frac{k}{1},$$

odkiaľ

$$k = 12.$$

Ďalej môžem postupovať napríklad tak, že do rovnice funkcie

$$f : y = \frac{12}{x}$$

dosadím všetky hodnoty x z tabuľky. Potom porovnám, či pre y mi vyšli rovnaké hodnoty ako sú v tabuľke:

$$f(4) = \frac{12}{4} = 3,$$

$$f(5) = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Zatiaľ hodnoty sedia, pokračujem

$$f(-6) = \frac{12}{-6} = -2.$$

A tu sa to pokazilo, v tabuľke je namiesto -2 číslo -3. Preto táto tabuľka nepredstavuje nepriamu úmernosť.

U: Veľmi dobre, predpokladám, že tento postup zopakuješ aj v druhej časti.

Ž: *Pravdaže, už keď mi to tak dobre ide... Najprv z prvej dvojice zistím koeficient:*

$$-6 = \frac{k}{-6},$$

odkiaľ

$$k = 36.$$

Teraz som získal rovnicu nepriamej úmernosti

$$g : y = \frac{36}{x}.$$

Postupne budem do nej dosadzovať ostatné hodnoty x z tabuľky:

$$g(-4) = \frac{36}{-4} = -9,$$

$$g(1) = \frac{36}{1} = 36,$$

$$g(6) = \frac{36}{6} = 6,$$

$$g(9) = \frac{36}{9} = 4.$$

A všetko sedí, teda druhá tabuľka predstavuje nepriamu úmernosť.

U: Výborne, ja len zopakujem, že jej rovnica je $g : y = \dfrac{36}{x}$.

Úloha 6: *Zistite, či je niektorou z uvedených tabuliek určená nepriama úmernosť. Ak áno, zapíšte jej rovnicu.*

a)

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

b)

x	-2	-1	0,5	1	4
y	4	8	-16	-8	-2

Výsledok: b) $y = \dfrac{-8}{x}$