Súčtové vzorce

RNDr. Marián Macko

U: Vedel by si vypočítať $\cos 15°$ bez použitia kalkulačky a tabuliek? Môžeš využívať iba známe hodnoty argumentov: $30°$; $45°$; $60°$.

Ž: *15 stupňov by som zapísal ako* **rozdiel hodnôt $45°$ a $30°$**. *Potom* $\cos 15° = \cos(45° - 30°)$. *Mohlo by sa to počítať ako rozdiel kosínusov, teda*

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° - \cos 30°.$$

U: Skús dopočítať. Potom overíme, či máš pravdu.

Ž: *Hodnoty funkcie kosínus pre* 30 *a* 45 *stupňov sú známe:*

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dosadím do posledného vzťahu a upravím na spoločného menovateľa, čo je číslo 2. *Takže dostávam*

$$\cos 45° - \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$$

To by mohol byť výsledok.

U: Tak sa trochu nad ním zamyslíme. Výsledok $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$, ktorý si dostal, je číslo kladné alebo záporné?

Ž: *Čitateľ* $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ *zlomku je záporné číslo, lebo odmocnina z čísla* 2 *je určite menej, než druhá odmocnina z čísla* 3. *Celý zlomok je záporné číslo. Asi tu niečo nesedí.*

U: Máš pravdu. Pre argument x z intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ funkcia kosínus nadobúda kladné hodnoty. Hodnotou funkcie ***kosínus*** pre 15 ***stupňov*** má byť ***kladné číslo***. Preto vzorec

$$\cos(x - y) = \cos x - \cos y$$

nemá všeobecnú platnosť. Hodnota funkcie kosínus pre rozdiel dvoch argumentov sa nerovná rozdielu hodnôt funkcie kosínus pre tieto argumenty.

Ž: *Ako to teda bude?*

U: Tento vzorec ti prezradím ako fakt, bez dôkazu. Musíš si pamätať, že platí:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Ž: *Dosť komplikovaný výraz na pravej strane vzorca. Ak takto budú vyzerať aj ostatné vzorce, tak sa to nenaučím.*

U: Dôležité je, že ostatné vzorce sa z tohto vzorca dajú odvodiť. Využiješ poznatky o goniometrických funkciách sínus a kosínus. Presvedčíš sa o tom hneď pri odvádzaní vzorca, ktorý udáva, ako vyjadriť hodnotu funkcie kosínus pre súčet dvoch argumentov.
Nedá sa ***súčet*** vo výraze $\cos(x+y)$ zapísať cez ***rozdiel***?

Ž: *Ale potom musíme dať znamienko mínus aj pred y a máme*

$$\cos(x+y) = \cos\left[x-(-y)\right].$$

U: Začal si veľmi pekne. Ďalej použijeme vzorec

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Pre náš prípad je prvým argumentom x a druhým argumentom $(-y)$. Všade za y teraz dosadíme $(-y)$ a máme

$$\cos(x+y) = \cos\left[x-(-y)\right] = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y).$$

Ž: *Vedel by som pokračovať ďalej. Veď funkcia* **kosínus** *je párna. Preto* $\cos(-y) = \cos y$ *a funkcia* **sínus** *je nepárna, teda* $\sin(-y) = -\sin y$. *Po dosadení má výraz tvar*

$$\cos x \cos y + \sin x(-\sin y).$$

U: Super! Druhý člen $\sin x(-\sin y)$ na pravej strane stačí iba upraviť na tvar $(-\sin x \sin y)$ a dostávame výsledok:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Ž: *Mali ste pravdu. Oba vzťahy sú podobné. Líšia sa iba v znamienkach. Tam kde je mínus v prvom vzťahu, je plus v druhom a naopak.*

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y;\ \ x,y \in \mathbb{R}\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y;\ \ x,y \in \mathbb{R}\end{aligned}}$$

U: Vyskúšajme aplikáciu prvého z týchto vzťahov pri úprave výrazu $\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$. Namiesto prvého argumentu x vo vzorci

$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$$

U: dosaď číslo $\frac{\pi}{2}$.

Ž: *Za premennú x do výrazov na pravej a ľavej strane dosadím číslo $\frac{\pi}{2}$ a mám*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos y+\sin\frac{\pi}{2}\sin y.$$

Hodnota funkcie kosínus pre argument rovný číslu $\frac{\pi}{2}$ je rovná nule. Zároveň platí $\sin\frac{\pi}{2}=1$. Dosadím

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0\cdot\cos y+1\cdot\sin y.$$

U: Ukázal si, že platí:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y.$$

Z tohto vzťahu získame ďalší vzťah využitím substitúcie. Argument $\frac{\pi}{2}-y$ funkcie kosínus označíme ako novú premennú x:

$$\frac{\pi}{2}-y=x.$$

Vyjadri neznámu y!

Ž: *Odrátam zlomok $\frac{\pi}{2}$, teda*

$$-y=x-\frac{\pi}{2}.$$

Výrazy na oboch stranách rovnice vynásobím číslom -1 a mám

$$y=\frac{\pi}{2}-x.$$

U: Preto zo vzťahu

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y$$

substitúciou dostávame analogický vzťah pre funkciu sínus:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x.$$

Ž: *Spomínam si, že sme platnosť týchto vzťahov ukázali aj využitím grafov funkcií sínus a kosínus.*

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\[2ex]\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

U: Odvodiť vzťahy pre hodnotu funkcie sínus zo súčtu respektíve z rozdielu dvoch argumentov už nebude problém. Vieme, že platí:

$$\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Ž: *Preto to platí aj pre argument* $x + y$

$$\sin(x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right].$$

U: V hranatej zátvorke odstránime okrúhlu zátvorku a prvé dva členy spojíme do novej zátvorky. Dostávame

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - x - y\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right].$$

Na posledný výraz aplikuj vzorec $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Ž: *V našom prípade premenná* a *je výraz* $\frac{\pi}{2} - x$, *premenná* b *je rovná* y. *Preto dostávam*

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y.$$

U: Opäť použijeme vzťahy $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dostali sme výsledný tvar vzorca:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Ž: *Očakávam, že* **odvodíme** *ešte* **vzorec pre výraz** $\sin(x - y)$.

U: Využijeme vzorec, ktorý sme odvodili ako posledný. Dá sa ***rozdiel*** $(x - y)$ zapísať ako ***súčet***?

Ž: *Áno. Znamienko mínus priradím k premennej* y

$$x - y = x + (-y)$$

.

U: Použi vzorec pre výraz $\sin(x + y)$.

Ž: *Všade, kde je yvo vzorci*

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

dosadím výraz $(-y)$ *a mám*

$$\sin(x-y)=\sin\left[x+(-y)\right]=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y).$$

U: Zostáva nám nahradiť výrazy $\cos(-y)$ a $\sin(-y)$ inými výrazmi. Ktorú vlastnosť funkcií sínus a kosínus využijeme?

Ž: *Funkcia kosínus je párna, teda* $\cos(-y)=\cos y$. *Funkcia sínus je nepárna, preto* $\sin(-y)=-\sin y$.

U: Dosadíme do posledného výrazu a máme výsledok

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Ž: *Je podobný predchádzajúcemu vzorcu. Rozdiel je len v znamienku mínus.*

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;\ \ x,y\in\mathbb{R}\\[2ex]\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;\ \ x,y\in\mathbb{R}\end{array}}$$

Príklad 1: *Bez použitia kalkulačky vypočítajte:*
a) $\sin 75°$,
b) $\cos 105°$.

U: Dá sa $75°$ vyjadriť ako rozdiel alebo súčet význačných hodnôt $30°$; $45°$; $60°$?

Ž: *75 stupňov sa dá zapísať ako súčet 30 stupňov a 45 stupňov.*

U: Preto budeme hodnotu $\sin 75°$ počítať využitím súčtového vzorca

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dosaď za premennú x hodnotu 30 a za premennú y hodnotu 45 stupňov.

Ž: *Po dosadení dostaneme*

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°.$$

Hodnoty funkcií sínus a kosínus pre 30 a 45 stupňov sú známe:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dosadím a zlomky vynásobím

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

V čitateli posledného zlomku je $\sqrt{6}$, lebo je to súčin druhých odmocnín z čísel 2 a 3.

U: Výsledok sa dá upraviť napríklad tak, že vyberieme pred zátvorku zlomok $\frac{1}{4}$:

$$\sin 75° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$

Tento číselný výraz je výsledkom.

U: Vyrieš samostatne úlohu b).

Ž: *Máme vypočítať* $\cos 105°$. *105 stupňov zapíšem ako súčet 45 stupňov a 60 stupňov a mám*

$$\cos 105° = \cos(45° + 60°).$$

Použijem súčtový vzorec

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

V našom prípade

$$\cos 105° = \cos 45° \cdot \cos 60° - \sin 45° \cdot \sin 60°.$$

U: Hodnoty funkcií sínus a kosínus pre 60 stupňov sú

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2};\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dosaď a dopočítaj.

Ž: *Po dosadení dostanem*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

U: Výsledkom úlohy je číselný výraz

$$\cos 105^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right).$$

Je to kladné, alebo záporné číslo?

Ž: *Druhá odmocnina z čísla* 2 *je menej než druhá odmocnina z čísla* 6*. Je to* **záporné číslo**.

Úloha : *Bez použitia kalkulačky vypočítajte* $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$.

Výsledok: $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Príklad 2: *Bez použitia kalkulačky vypočítajte* $\sin(x+y)$, *ak je dané:*
$\cos x = \frac{5}{7}$; $\quad x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$,
$\sin y = \frac{1}{5}$; $\quad y \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

U: Hodnotu výrazu $\sin(x+y)$ budeme počítať podľa súčtového vzorca

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Čo k tomu potrebujeme najskôr vypočítať?

Ž: *Nepoznáme hodnotu funkcie sínus pre premennú* x, *a tak isto nepoznáme hodnotu funkcie kosínus premennej* y.

U: Vypočítame ich zo základného vzorca pre funkcie sínus a kosínus

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dosaď číselnú hodnotu $\frac{5}{7}$ za výraz $\cos x$ a vypočítaj hodnotu funkcie sínus.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\sin^2 x + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1.$$

Číselný zlomok umocním a odrátam od výrazov na oboch stranách rovnice

$$\sin^2 x + \frac{25}{49} = 1,$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{25}{49}.$$

U: Hodnota výrazu na pravej strane je $\frac{24}{49}$, preto platí

$$\sin^2 x = \frac{24}{49}.$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Výrazy na oboch stranách rovnice odmocním a mám*

$$\sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{24}{49}}.$$

Dostanem hodnotu funkcie sínus

$$\sin x = \sqrt{\frac{24}{49}}.$$

U: Pozor! Druhá odmocnina z výrazu a^2 nie je a, ale jeho ***absolútna hodnota***:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Teda aj v našom prípade

$$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|.$$

Preto po odmocnení výrazov na oboch stranách rovnice

$$\sin^2 x = \frac{24}{49}$$

dostaneme

$$|\sin x| = \sqrt{\frac{24}{49}}.$$

Ž: *Ako odstránime absolútnu hodnotu?*

U: V zadaní je informácia, do ktorého intervalu patrí premenná x. V našom prípade zodpovedá bodom v I. kvadrante, preto hodnota funkcie sínus bude ***kladná***

$$\sin x = \sqrt{\frac{24}{49}}.$$

U: Analogickým spôsobom vypočítaj hodnotu $\cos y$, ak zo zadania vieš, že $\sin y = \frac{1}{5}$ a $y \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Ž: *Teraz do základného vzťahu*

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

dosadím za hodnotu funkcie sínus a mám

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 y = 1.$$

Zlomok umocním

$$\frac{1}{25} + \cos^2 y = 1$$

a od výrazov na oboch stranách rovnice odrátam číslo $\frac{1}{25}$,

$$\cos^2 y = 1 - \frac{1}{25}.$$

U: Hodnota výrazu na pravej strane rovnice je $\frac{24}{25}$. Pokračuj vo výpočtoch.

Ž: *Po odmocnení výrazov na oboch stranách rovnice* $\cos^2 y = \frac{24}{25}$ *nezabudnem na* **absolútnu hodnotu** *vo výraze na ľavej strane*

$$|\cos y| = \sqrt{\frac{24}{25}}.$$

U: Hodnoty premennej y podľa zadania zodpovedajú II. kvadrantu. Pre takéto y je hodnota funkcie kosínus ***záporná***. Preto

$$\cos y = -\sqrt{\frac{24}{25}}.$$

U: Zrekapitulujeme všetky zadané a vypočítané hodnoty:

$$\cos x = \frac{5}{7}; \;\; \sin x = \sqrt{\frac{24}{49}},$$

$$\sin y = \frac{1}{5}; \;\; \cos y = -\sqrt{\frac{24}{25}}.$$

Teraz sa môžeme vrátiť späť k zadaniu úlohy.

Ž: *Máme vypočítať hodnotu funkcie sínus pre* **súčet dvoch argumentov** x **a** y. *Stačí dosadiť do súčtového vzorca*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sqrt{\frac{24}{49}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{24}{25}}\right) + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5}.$$

Zlomky vynásobím

$$-\sqrt{\frac{24}{49} \cdot \frac{24}{25}} + \frac{5}{35}$$

a druhý zlomok vykrátim. Dostávam

$$-\sqrt{\frac{24}{49} \cdot \frac{24}{25}} + \frac{1}{7}.$$

Čo urobiť s prvými zlomkami?

U: Súčin zlomkov $\frac{24}{49}$ a $\frac{24}{25}$ predstavuje jeden zlomok $\frac{24 \cdot 24}{49 \cdot 25}$. ***Druhá odmocnina*** z tohto zlomku je rovná číslu $\frac{24}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$. Preto výsledok úlohy bude

$$\sin(x+y) = -\frac{24}{35} + \frac{1}{7} = -\frac{19}{35}.$$

Príklad 3: *Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí* $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin x$.

U: Akú máš predstavu o dôkaze zadanej rovnosti?

Ž: *Upravoval by som výraz na ľavej strane.*

U: Ako by si začal?

Ž: *Použil by som súčtové vzorce pre sínus a kosínus dvoch argumentov. Máme ich v rámčeku.*

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\[2em] \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\end{array}}$$

U: Máš pravdu. Prvým sčítancom v argumente funkcie sínus je číslo $\frac{\pi}{3}$. Druhým sčítancom tak ako aj pre funkciu kosínus je premenná x. Prvým sčítancom v argumente funkcie kosínus je číslo $\frac{\pi}{6}$.

$$Ľ=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right).$$

Hodnoty funkcií sínus a kosínus pre argument $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{6}$ by si mal poznať.

Ž: *Hodnoty sú* $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. *Pre argument* $\frac{\pi}{6}$ *je to naopak. Po dosadení dostávam*

$$Ľ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right).$$

U: Odstránime zátvorku a dostávame výraz

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Škrtnem prvý a tretí člen. Sú rovnaké, až na znamienko. V súčte dajú nulu. Druhý a posledný člen sú rovnaké, preto ich sčítam a mám*

$$2\cdot\frac{1}{2}\sin x.$$

Ale to je výraz $\sin x$.

U: Postupnými ekvivalentnými úpravami sme dostali výraz $\sin x$ na pravej strane rovnosti.

Ž: *Čo sú to ekvivalentné úpravy?*

U: Také úpravy, ktoré daný výraz nahrádzajú iným výrazom, pričom sú definované pre tie isté hodnoty premennej, ktorá vo výraze vystupuje. Pre všetky tieto hodnoty premennej majú obidva výrazy rovnakú číselnú hodnotu. V našom prípade sme použili súčtové vzorce, hodnoty funkcií sínus a kosínus pre význačné hodnoty, odstránenie zátvorky, odčítanie a sčítanie rovnakých výrazov.

Príklad 4: *Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí* $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \cos^2 x+\cos^2 y-1.$

U: Najskôr upravíme výraz $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$ na ľavej strane rovnosti. Využi najskôr súčtové vzťahy.

Ž: *Výraz* $\cos(x+y)$ *nahradím podľa súčtového vzťahu výrazom* $\cos x\cos y - \sin x\sin y$. *Pre výraz* $\cos(x-y)$ *to bude analogické. Znamienko plus sa zmení na mínus. Po dosadení máme*

$$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y)\cdot(\cos x\cos y + \sin x\sin y).$$

Roznásobíme?

U: Je to jeden zo spôsobov, ako pokračovať v úpravách. Výrazy v zátvorkách sú rovnaké. V prvej zátvorke sa odčítajú, v druhej sčítajú. Je to teda vzorec

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Ž: *Áno, máte pravdu. Súčin zátvoriek sa dá upraviť na rozdiel druhých mocnín. Preto platí*

$$(\cos x\cos y - \sin x\sin y)\cdot(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y.$$

Ale to nie je výraz na pravej strane rovnosti.

U: Pozri sa na výraz $\cos^2 x+\cos^2 y-1$ na pravej strane rovnosti. Neobsahuje hodnoty funkcie sínus. Preto sa musíme snažiť výrazy $\sin^2 x$ a $\sin^2 y$ nahradiť inými. Takými, kde bude funkcia kosínus.

Ž: *Myslíte základný vzťah*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1?$$

U: Áno. Výraz $\sin^2 x$ sa na základe tohto vzťahu dá nahradiť výrazom $1-\cos^2 x$. Jednoducho sme od výrazov na oboch stranách rovnice odrátali výraz $\cos^2 x$. To isté platí pre premennú y, teda

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y.$$

Dosaď a pokračuj v úpravách.

Ž: *Po dosadení roznásobím zátvorky a mám*

$$\cos^2 x\cos^2 y - \left(1-\cos^2 x-\cos^2 y+\cos^2 x\cos^2 y\right).$$

U: Odstránime zátvorky a dostaneme

$$\cos^2 x\cos^2 y - 1 + \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 x\cos^2 y.$$

Ž: *Prvý a posledný člen dajú v súčte nulu. Sú rovnaké až na znamienko. Zostávajúce tri členy dávajú výraz* $\cos^2 x+\cos^2 y-1$. *Ale to je výraz na pravej strane dokazovanej rovnosti.*

Príklad 5: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-\frac{1}{2}.$

U: Nahraď kosínusy súčtu a rozdielu dvoch argumentov na ľavej strane rovnice výrazmi podľa súčtových vzorcov. Máš ich v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{aligned}}$$

Ž: *V našom prípade* $a=\frac{\pi}{6}$ *a premenná* b *je rovná premennej* x*. Dosadím podľa súčtových vzorcov a mám*

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=-\frac{1}{2}.$$

U: Teraz odstránime zátvorku. Znamienka všetkých členov v zátvorke sa zmenia na ***opačné***, preto má rovnica tvar

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=-\frac{1}{2}.$$

Ako sa zjednoduší výraz na ľavej strane rovnice?

Ž: *Prvý a tretí člen sa odčítajú. Zvyšné dva členy sú rovnaké. Sčítam ich a mám rovnicu*

$$2\sin\frac{\pi}{6}\sin x=-\frac{1}{2}.$$

U: Vieme, že $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Dosadíme do výrazu na ľavej strane rovnice

$$2\cdot\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{2}$$

a dostávame

$$\sin x=-\frac{1}{2},$$

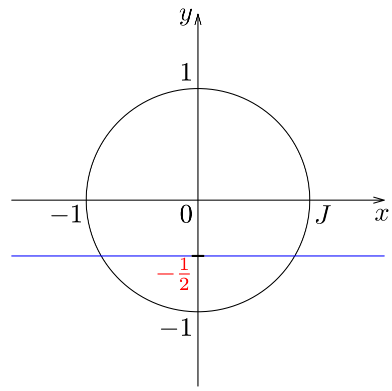
čo je jednoduchá goniometrická rovnica.

Ž: *Spôsob riešenia goniometrickej rovnice však potrebujem pripomenúť.*

U: Poďme na to cez jednotkovú kružnicu. Akú interpretáciu má funkcia sínus na jednotkovej kružnici?

Ž: *Funkcia sínus reálnemu číslu* x *priradí* ***y-ovú súradnicu*** *bodu na jednotkovej kružnici, ktorý zodpovedá reálnemu číslu* x*.*

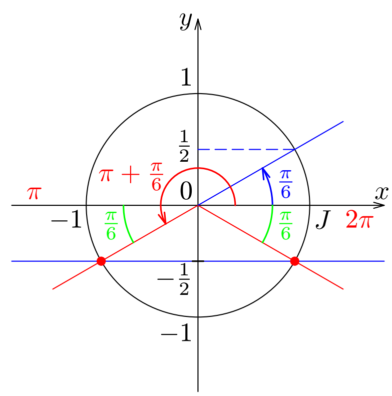
U: Pri riešení rovnice $\sin x=-\frac{1}{2}$ využijeme práve túto vlastnosť. Rovnosť znamená, že na jednotkovej kružnici máme nájsť všetky body, ktorých ***y-ová súradnica*** je rovná číslu $-\frac{1}{2}$. Všetky body v rovine, ktoré majú y-ovú súradnicu rovnú číslu $-\frac{1}{2}$, vytvárajú ***priamku rovnobežnú s x-ovou osou***.



Ž: *Už si spomínam. Body, ktoré zodpovedajú riešeniu nájdeme ako* **priesečníky** *jednotkovej kružnice a tejto priamky.*

U: Ako máš možnosť vidieť na obrázku, priesečníky sú dva. Tieto body sú v III. a vo IV. kvadrante. Hodnoty premennej x zodpovedajúce týmto bodom vyjadríme pomocou čísla $\dfrac{\pi}{6}$. Hodnota funkcie sínus pre číslo $\dfrac{\pi}{6}$ je rovná $\dfrac{1}{2}$.

Ž: *Ale to je hodnota zodpovedajúca bodu v I. kvadrante.*



U: Pozri na obrázok. Hodnoty premennej x zodpovedajúce bodom v III. a vo IV. kvadrante súvisia s touto hodnotou pre I. kvadrant. Preto platí

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; \;\; x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Ž: *Budú to všetky riešenia?*

U: Nie. Sú to základné hodnoty riešenia. Keďže funkcia sínus je periodická s ***najmenšou periódou*** 2π, všetky riešenia získame zo základných hodnôt pripočítaním celočíselných násobkov čísla 2π.

Ž: *Riešenie rovnice je*

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \;\; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; \;\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Príklad 6: *Načrtnite graf funkcie* $f: y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ *na uzavretom intervale* $\langle -2\pi;\ 2\pi \rangle$.

U: Zjednodušíme výraz na pravej strane predpisu funkcie. Využijeme súčtové vzorce, ktoré máš v rámčeku.

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

U: Urč hodnoty premenných a a b pre zadanú funkciu.

Ž: *Premenná a má v našom prípade hodnotu* $\frac{\pi}{6}$ *a* $b = x$.

U: Pre oba výrazy v predpise funkcie sú tieto hodnoty rovnaké. Využitím súčtových vzorcov dostaneme:

$$f: y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right) + \left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right).$$

Pokračuj v úpravách.

Ž: *Po odstránení zátvoriek dostanem*

$$y = \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x.$$

Druhý a posledný člen škrtnem. Majú **rovnakú hodnotu**, *odlišujú sa znamienkom. Dávajú v súčte nulu. Teda*

$$y = \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x.$$

U: Zvyšné dva členy sú tiež ***rovnaké***. V súčte dávajú dvojnásobok jedného z nich

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos x$$

Poznáš hodnotu funkcie sínus pre argument $\frac{\pi}{6}$?

Ž: *Hodnota funkcie sínus pre argument* $\frac{\pi}{6}$ *je rovná číslu* $\frac{1}{2}$.

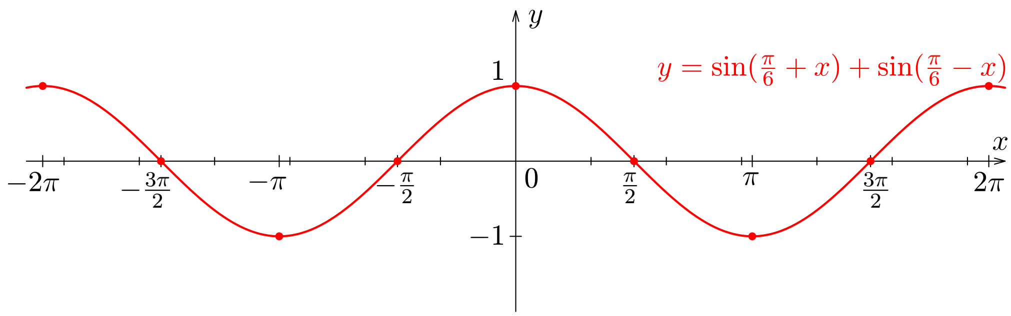
U: Dosadíme a upravíme. Súčin čísel 2 a $\frac{1}{2}$ je rovný číslu 1, a preto

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos x = \cos x.$$

Ž: *Zaujímavé. Pod komplikovaným zadaním sa skrýva jednoduchá funkcia.*

U: Máš pravdu. Predpis funkcie $f: y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ sa dá upraviť na predpis jednoduchej goniometrickej funkcie $f: y = \cos x$. Dúfam, že poznáš graf tejto funkcie.

Ž: *Grafom je kosínusoida. Začnem v začiatku súradnicovej sústavy. Tu nadobudne maximum* 1*. Ďalej je to už jednoduché.*



Príklad 7: *Pre ostré vnútorné uhly v trojuholníku ABC platí:* $\sin\alpha = \frac{7}{25}$; $\sin\beta = \frac{3}{5}$. *Vypočítajte* $\sin\gamma$.

U: Dá sa uhol γ vyjadriť pomocou ostatných uhlov trojuholníka ABC?

Ž: **Súčet veľkostí vnútorných uhlov** *v trojuholníku je* $180°$. *Preto uhol* γ *sa dá vyjadriť ako rozdiel čísla* $180°$ *a súčtu zvyšných dvoch uhlov takto*

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

U: Dosadíme do zadania úlohy

$$\sin\gamma = \sin\left[180° - (\alpha + \beta)\right].$$

Na posledný zápis sa pozeraj ako na výraz $\sin(180° - x)$. V našom prípade pod premennou x si treba predstaviť súčet uhlov α a β. Vieš tento zápis zjednodušiť?

Ž: *Viem, že platí* $\sin(180° - x) = \sin x$. *Keďže* $x = \alpha + \beta$, *tak to v úlohe upravím na tvar*

$$\sin\gamma = \sin\left[180° - (\alpha + \beta)\right] = \sin(\alpha + \beta).$$

U: Pointou úlohy je teda určiť hodnotu funkcie sínus pre uhol γ pomocou hodnôt zodpovedajúcich uhlom α a β. Vieš vyjadriť hodnotu funkcie sínus pre súčet dvoch uhlov α a β?

Ž: *Použijem súčtový vzorec*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

U: Hodnoty funkcie sínus pre oba uhly sú zadané. Čo zatiaľ nepoznáme, to sú hodnoty funkcie kosínus pre tieto uhly. K ich výpočtu použijeme základný vzorec

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dosaď najskôr hodnotu pre uhol α.

Ž: *V tomto prípade* x *bude uhol* α *a mám*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dosadím $\sin\alpha = \frac{7}{25}$:

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

a umocním ako zlomok. Dostávam

$$\frac{49}{625} + \cos^2\alpha = 1.$$

U: Takže

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{625},$$

a po úprave je

$$\cos^2\alpha = \frac{576}{625}.$$

Odmocníme a máme

$$|\cos\alpha| = \sqrt{\frac{576}{625}}.$$

Aký je uhol α?

Ž: *Uhol α je* **ostrý**, *preto hodnota funkcie kosínus bude* **kladná**,

$$\cos\alpha = \frac{24}{25}.$$

U: Vypočítaj analogicky hodnotu funkcie kosínus pre uhol β.

Ž: *Do základného vzorca*

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

dosadím za sínus hodnotu $\frac{3}{5}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\beta = 1,$$

umocním

$$\frac{9}{25} + \cos^2\beta = 1$$

a odčítam zlomok

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{9}{25}.$$

Na pravej strane bude zlomok $\frac{16}{25}$. *Odmocním a keďže aj uhol β je* **ostrý uhol**, *dostanem*

$$\cos\beta = \frac{4}{5}.$$

U: Máme všetky hodnoty potrebné na doriešenie úlohy. Vráťme sa na začiatok úlohy, kde sme sínus uhla γ vyjadrili cez súčtový vzorec

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Po dosadení máme

$$\sin\gamma = \frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5} + \frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}.$$

Pokračuj vo výpočtoch.

Ž: *Stačí najskôr vynásobiť zlomky v dvojiciach*

$$\frac{7}{25} \cdot \frac{4}{5} + \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{28}{125} + \frac{72}{125}.$$

Súčet zlomkov bude číslo $\frac{100}{125}$, *čo sa dá krátiť číslom* 25. *Výsledok bude* $\frac{4}{5}$, *teda*

$$\sin \gamma = \frac{4}{5}.$$

Príklad 8: *Určte* $\mathrm{tg}^2x + \mathrm{cotg}^2x$, *ak* $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x = 5$, *pričom* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$.

U: Podľa zadania je súčet hodnôt funkcií tangens a kotangens rovný číslu 5. Potrebujeme určiť hodnotu výrazu, ktorý je súčtom druhých mocnín týchto funkcií. Preto výrazy na ľavej a pravej strane zadanej rovnosti $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x = 5$ umocníme a dostávame

$$(\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x)^2 = 5^2.$$

Uprav výraz na ľavej strane rovnosti.

Ž: *Použijem vzorec* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. *V našom prípade* $a = \mathrm{tg}x$ *a* $b = \mathrm{cotg}x$, *preto platí*

$$\mathrm{tg}^2x + 2\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x + \mathrm{cotg}^2x = 25.$$

U: Od výrazov na oboch stranách rovnice odrátame člen $2\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x$, takže

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{cotg}^2x = 25 - 2\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x.$$

Zostáva určiť hodnotu výrazu $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x$. Tušíš ako sa tento výraz dá vyjadriť?

Ž: *Kotangens je prevrátená hodnota funkcie tangens. Preto je ich súčin rovný číslu* 1, *teda*

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1.$$

U: Správne. Dosadíme do výrazu na pravej strane

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{cotg}^2x = 25 - 2\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 25 - 2 \cdot 1 = 23.$$

Výsledkom úlohy je číslo 23.

Ž: *Nedala sa úloha vyriešiť tak, že si zo zadania* $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x = 5$ *vyjadrím napríklad funkciu kotangens,* $\mathrm{cotg}x = 5 - \mathrm{tg}x$, *a dosadím do výrazu*

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{cotg}^2x?$$

U: Vyskúšaj.

Ž: *Za výraz* $\mathrm{cotg}x$ *dosadím* $5 - \mathrm{tg}x$ *a dostávam rovnicu*

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{cotg}^2x = \mathrm{tg}^2 + (5 - \mathrm{tg}x)^2.$$

Dvojčlen v zátvorke umocním podľa vzorca $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. *Prvý člen* a *je rovný číslu* 5 *a druhý člen* b *je* $\mathrm{tg}x$, *takže*

$$\mathrm{tg}^2x + (5 - \mathrm{tg}x)^2 = \mathrm{tg}^2x + 25 - 10 \cdot \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^2x.$$

U: Posledný výraz sa dá upraviť na tvar $2\mathrm{tg}^2x - 10 \cdot \mathrm{tg}x + 25$. Aby sme vyčíslili jeho hodnotu, museli by sme určiť hodnotu funkcie $\mathrm{tg}x$.

Ž: *Ako?*

U: Do rovnice $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x = 5$ v zadaní úlohy by sme namiesto funkcie kotangens dosadili $\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$. Vyplýva to zo vzťahu, ktorý si už v tejto úlohe použil.

Ž: *Aha! Takto dostanem rovnicu*

$$\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x} = 5.$$

Ako postupovať ďalej?

U: Výrazy na oboch stranách rovnice teraz vynásobíme výrazom $\mathrm{tg}x$ a máme rovnicu

$$\mathrm{tg}^2x + 1 = 5\mathrm{tg}x.$$

Ž: *Nie je to jednoduché. Dostali sme kvadratickú rovnicu*

$$\mathrm{tg}^2x - 5\mathrm{tg}x + 1 = 0.$$

Radšej ju ale nebudeme riešiť. Prvý spôsob riešenia úlohy bol jednoduchší. Uvedomujem si, že základný vzťah medzi hodnotami funkcií tangens a kotangens bol pre riešenie úlohy fakt dôležitý.

Príklad 9: *Vyjadrite* $\mathrm{tg}(x+y)$ *ako výraz obsahujúci hodnoty* $\mathrm{tg}x$ *a* $\mathrm{tg}y$.

U: Najskôr využijeme definíciu funkcie tangens.

Ž: *Tangens je podiel hodnôt funkcie sínus a kosínus:*

$$\mathrm{tg}a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

U: Argument a je v našom prípade súčet $x+y$, teda

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}.$$

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus by pre teba nemali byť problémom.

Ž: *Pre výraz* $\sin(x+y)$ *v čitateli využijem súčtový vzorec*

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

a pre výraz $\cos(x+y)$ *v menovateli to bude vzorec*

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

Dosadím a dostávam

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y}.$$

U: Výsledný výraz má obsahovať iba hodnoty funkcie tangens premenných x a y. Keďže posledný výraz, ktorý si dostal úpravou obsahuje hodnoty funkcie sínus a kosínus, a tangens je ich podielom, vydelíme čitateľa aj menovateľa zlomku výrazom $\cos x\cos y$, tak ako to vidíš v rámčeku.

$$\boxed{\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\cos x\cos y}}}$$

Ž: *Ako z toho dostanete tangens?*

U: Tangens, ako si správne pripomenul, je ***podiel hodnôt funkcie sínus a kosínus***. K takýmto podielom sa dostaneme, ak zlomky v čitateli a menovateli zloženého zlomku rozdelíme na dve časti. Dostaneme zložený zlomok, ktorý máš v rámčeku.

$$\boxed{\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}}$$

U: Skús pokračovať.

Ž: *V prvom zlomku čitateľa zloženého zlomku vykrátim výraz* $\cos y$ *a v druhom zlomku výraz* $\cos x$*. V prvom zlomku menovateľa zloženého zlomku vykrátim aj* $\cos x$*, aj* $\cos y$ *a dostávam výraz znázornený v rámčeku.*

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin y}{\cos y}}}$$

U: Všetky zlomky, ktoré si zapísal v poslednom výraze, možno podľa definície nahradiť hodnotou funkcie tangens príslušnej premennej:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\mathrm{tg}x;\quad \frac{\sin y}{\cos y}=\mathrm{tg}y.$$

Dostaneme

$$\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}.$$

To je výsledok úlohy.
Zostáva nám určiť podmienky.

Ž: *Výrazy* $\cos x$ *a* $\cos y$ *musia byť rôzne od nuly, lebo sú v menovateľoch zlomkov. To znamená, že* x *a* y *nesmú byť čísla v tvare* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$*, kde* k *je celé číslo.*

U: To isté musí platiť aj pre výraz $x+y$, nakoľko sme $\mathrm{tg}(x+y)$ vyjadrili v tvare $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$. V menovateli sa teda nachádza aj výraz $\cos(x+y)$. Tento výraz je v postupných úpravách nahradený výrazom $1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y$.

Ž: *Čiže aj* $x+y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

U: Áno. Riešením tejto úlohy je dosť dôležitý vzorec pre hodnotu funkcie tangens. Preto na záver riešenia úlohy uvedieme tento vzorec ešte raz:

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}.$$