Základné vzťahy medzi hodnotami goniometrických funkcií

RNDr. Marián Macko

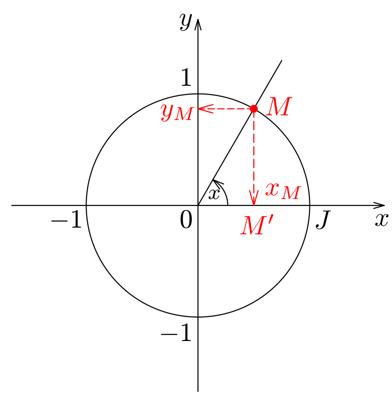
U: Predstav si, že ti zadám hodnotu jednej z goniometrických funkcií. Napríklad $\sin x = 0{,}6$. Vedel by si ***určiť pre to isté x hodnotu funkcie kosínus***?

Ž: *Žiadny problém. Použijem kalkulačku. Najskôr určím hodnotu x a potom kosínus.*

U: Má to istý háčik. Väčšina hodnôt určených na kalkulačke je daná iba približne. Platilo by to aj pre našu úlohu. Matematika však pozná vzťah, ktorý umožňuje prechod od hodnôt funkcie sínus k hodnotám funkcie kosínus. Tento vzťah sa dá objaviť na základe jednotkovej kružnice. Stačí, ak si pripomenieme definície funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Reálnemu číslu x priradíme známym spôsobom na jednotkovej kružnici bod M. Súradnice x_M a y_M tohto bodu určujú hodnoty funkcií sínus a kosínus. Pre naše reálne číslo x preto platí*

$$\sin x = y_M, \quad \cos x = x_M.$$



U: Na obrázku máme takúto situáciu znázornenú pre reálne číslo x, ktorému zodpovedá bod na jednotkovej kružnici v I. kvadrante. Vznikol tak pravouhlý trojuholník $OM'M$. Aké dĺžky majú jeho strany?

Ž: *Dĺžka strany OM' je vlastne kosínus reálneho čísla x a strana $M'M$ určuje hodnotu funkcie sínus reálneho čísla x. Aká je dlhá prepona, to netuším.*

U: Kružnica je jednotková. ***Prepona*** OM je jej polomerom, preto má dĺžku rovnú číslu 1. Dĺžky všetkých strán pravouhlého trojuholníka sú uvedené v nasledujúcom rámčeku.

$$\boxed{\begin{array}{l} |OM'| = \cos x \\ |M'M| = \sin x \\ |OM| = 1 \end{array}}$$

Ž: *Poznáme teda dĺžky všetkých strán pravouhlého trojuholníka. Pre strany trojuholníka by sme mohli zapísať* **Pytagorovu vetu**.

U: Máš pravdu. Pomocou nej dostaneme sľúbený vzťah medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus. Urob to.

Ž: *Pre strany trojuholníka platí podľa Pytagorovej vety vzťah*

$$|OM'|^2 + |M'M|^2 = |OM|^2.$$

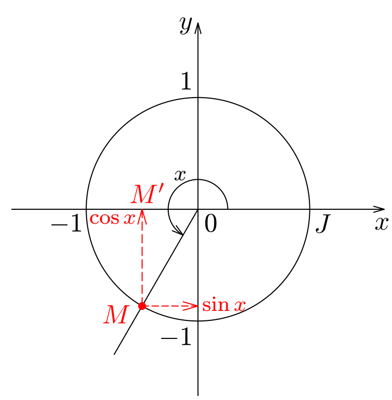
Dosadím vyjadrenia strán a mám

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

U: Je to veľmi dôležitý vzťah. Vyjadruje, že súčet druhých mocnín hodnôt funkcií sínus a kosínus je rovný číslu jedna.

Ž: *V prvom kvadrante sú sínus a kosínus kladné. Vyjadrovali aj dĺžky úsečiek. Ako to však bude vyzerať, ak bod M zodpovedajúci reálnemu číslu x bude v inom kvadrante? Hodnoty funkcií môžu byť vtedy záporné. Bude vzťah platiť aj v takomto prípade?*

U: Správna pripomienka. Vyskúšajme pre III. kvadrant. Aj teraz súradnice bodu M určujú hodnoty funkcií sínus a kosínus. Aké sú z hľadiska znamienka?



Ž: *Obe súradnice, teda aj* **hodnoty funkcií sú záporné**. *Nevyjadrujú dĺžky strán.*

U: Rozdiel medzi I. a III. kvadrantom je len v znamienku mínus. Preto ***dĺžky strán*** môžeme vyjadriť napríklad pomocou ***absolútnej hodnoty***:

$$|OM'| = |\cos x|,$$

alebo pomocou ***opačného výrazu***:

$$|OM'| = -\cos x.$$

Ž: *Po dosadení do Pytagorovej vety zostane absolútna hodnota?*

U: Vtedy dostaneme

$$(|\cos x|)^2 + (|\sin x|)^2 = 1.$$

Druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je vždy ***nezáporné*** reálne číslo. Bez ohľadu na to, či sú výrazy $\cos x$ a $\sin x$ kladné, záporné alebo nulové. Absolútna hodnota je preto po umocnení zbytočná. Je len duplicitou, ktorá vedie k nezápornosti výsledku. Platí

$$(|\cos x|)^2 = (\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

Pre funkciu sínus to platí analogicky.

Ž: *Začínam chápať súvislosti. Ani znamienko mínus vo vyjadrení dĺžky nemá pri použití Pytagorovej vety význam. Po umocnení sa zmení na kladnú hodnotu:*

$$(-\cos x)^2 = (\cos x)^2.$$

U: Absolútna hodnota alebo opačný výraz sú nutné iba na vyjadrenie dĺžok strán. Vyjadrenie vzťahu medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus je však vždy rovnaké. Nezávisí od toho, do ktorého kvadrantu patrí bod prislúchajúci reálnemu číslu x.

U: Pokračujme teraz v hľadaní vzťahov medzi ďalšími goniometrickými funkciami. Vieme vypočítať hodnotu funkcie tangens, ak poznáme hodnotu funkcie sínus?

Ž: *Na tento výpočet postačí definícia. Tangens je podiel hodnôt funkcií sínus a kosínus. No a kosínus vypočítame využitím vzťahu, ktorý sme pred chvíľou odvodili.*

U: Povedal si to správne. Z definícií funkcií tangens a kotangens máme ďalšie dva dôležité vzťahy medzi hodnotami goniometrických funkcií. Platia však iba pre také reálne čísla x, pre ktoré výrazy v menovateli sú nenulové. Teda

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ž: *Začínam tušiť vzťah medzi hodnotami funkcií tangens a kotangens. Jedna funkcia je prevrátenou hodnotou druhej.*

U: Vzťah vyplýva z definícií týchto funkcií. Zvykne sa uvádzať v tvare, kedy na ľavej strane je súčin hodnôt funkcií tangens a kotangens. Vypočítaj tento súčin.

Ž: *Za tangens dosadím podiel funkcií sínus a kosínus, za kotangens naopak. Všetky výrazy vykrátim. Výsledok bude číslo* 1.

$$\mathrm{tg} x \cdot \mathrm{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

U: Určme aj podmienky.

Ž: *Výrazy* $\cos x$ *a* $\sin x$ *v menovateli musia byť* **rôzne od nuly**. *Kosínus je rovný nule pre nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$ *a sínus nadobúda nulové hodnoty pre celočíselné násobky čísla* π.

U: Sú to čísla, ktoré nepatria do definičných oborov funkcií tangens a kotangens. Dajú sa vyjadriť jedným tvarom?

$$-\tfrac{5}{2}\pi \quad -2\pi \quad -\tfrac{3}{2}\pi \quad -\pi \quad -\tfrac{\pi}{2} \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{2} \quad \pi \quad \tfrac{3}{2}\pi \quad 2\pi \quad \tfrac{5}{2}\pi$$

Ž: *Čísla sa opakujú s periódou* $\dfrac{\pi}{2}$. *Preto sa dajú vyjadriť ako celočíselné násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$.

U: Vzťah

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1$$

platí pre všetky reálne čísla, okrem celočíselných násobkov čísla $\dfrac{\pi}{2}$.

Ž: *Jednoducho povedané, ak tangens bude rovný číslu* y, *kotangens bude jeho prevrátenou hodnotou. Bude mať hodnotu* $\dfrac{1}{y}$.

U: V nasledujúcej tabuľke sú zopakované ešte raz základné vzťahy medzi hodnotami goniometrických funkcií. Dva vzťahy sú dané definíciou funkcií tangens a kotangens. Zvyšné vzťahy sú dôsledkom definícií goniometrických funkcií.

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x};\ x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x};\ x \in \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1;\ x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1;\ x \in \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

U: Predstav si, že ti zadám hodnotu funkcie $\sin x$ a ty máš ***vypočítať hodnotu*** $\cos x$. Môžeš však použiť iba základný vzťah medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Ako by si postupoval?

Ž: *A to je problém? Zadanú hodnotu by som dosadil za* $\sin x$ *a odčítal ju od výrazov na oboch stranách rovnice. Získal by som rovnicu*

$$(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2,$$

kde neznámou je $\cos x$. *Nakoniec by som rovnicu odmocnil a dostal by som*

$$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}.$$

U: Odkiaľ vieš, že hodnota funkcie kosínus je kladná?

Ž: *Prečo kladná?*

U: Veď sa pozri na vyjadrenie, ktoré si získal. Na pravej strane máš druhú odmocninu z výrazu $1-(\sin x)^2$. Druhá odmocnina z reálneho čísla, ak existuje, je vždy ***nezáporné číslo***.

Ž: *Už mi dochádza, čo chcete povedať. Vo výraze na ľavej strane som zabudol na absolútnu hodnotu.*

U: Áno. Vyjadrenie hodnoty funkcie kosínus má byť správne v tvare

$$|\cos x| = \sqrt{1-(\sin x)^2}.$$

Hodnoty funkcie kosínus môžu byť predsa aj záporné.

Ž: *Ako určím, či je kosínus kladný alebo záporný?*

U: Keďže je zadaná hodnota $\sin x$, a nie reálne číslo x, musí byť zadaný aj interval, do ktorého argument x patrí.

Ž: *Ako to myslíte?*

U: V zadaní úlohy je uvedené, že x patrí napríklad do otvoreného intervalu $\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Aha! Pre takéto čísla je* **hodnota funkcie kosínus záporná**.

U: Môžeš teda odstrániť absolútnu hodnotu a hodnotu funkcie kosínus vyjadriť v tvare

$$\cos x = -\sqrt{1-(\sin x)^2}.$$

Ž: *Ale to isté platí aj pre reálne čísla x, ktorým sú priradené body na jednotkovej kružnici v druhom kvadrante. Keby som zobral* **prvý a štvrtý kvadrant**, *bola by hodnota funkcie kosínus kladná. Preto by platilo*

$$\cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}.$$

U: Myslím, že si porozumel. Okrem hodnoty $\sin x$, musí byť v úlohách zadaný aj interval, do ktorého x patrí.

Ž: *Podľa intervalu rozhodnem o znamienku pre* $\cos x$.

U: Situácia môže byť aj opačná. Zadaná je hodnota $\cos x$ a máme ***vypočítať hodnotu*** $\sin x$. Samozrejme zadáme aj interval pre argument x.

Ž: *Bude to analogické. Teraz bude platiť*

$$|\sin x| = \sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

O znamienku pre hodnotu funkcie sínus však rozhodne interval. Myslím, že to nemusíme rozoberať.

U: Tak to som rád, že si problematiku pochopil. Uvidíme, ako ti to pôjde pri riešení úloh.

Ž: *Mám ešte jednu otázku. Na začiatku som si všimol, že ste zapísali rovnosť*

$$(\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

Platí to?

U: Áno. Výraz na ľavej a pravej strane vyjadruje, že umocňujeme hodnotu funkcie kosínus. Pozor aby si však tento zápis nezamenil za výraz

$$\cos x^2.$$

Ž: *Tak, to sa mi nestane. V poslednom výraze je predsa zapísaná druhá mocnina premennej x, a nie hodnoty funkcie kosínus.*

Príklad 1: *Bez použitia kalkulačky vypočítajte hodnoty* $\sin x$, $\mathrm{tg} x$ *a* $\mathrm{cotg} x$, *ak* $\cos x = \dfrac{12}{13}$ *a* $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

U: Na výpočet hodnoty funkcie sínus použijeme základný vzťah $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$. Dosaď do tohto vzťahu zadanú hodnotu funkcie kosínus.

Ž: *Dostaneme*

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Zlomok umocníme tak, že umocníme čitateľa aj menovateľa.

$$\frac{144}{169} + (\sin x)^2 = 1.$$

U: V tejto rovnici je neznámou výraz $\sin x$, preto si ho vyjadríme. Od oboch strán rovnice odpočítame zlomok $\dfrac{144}{169}$:

$$(\sin x)^2 = 1 - \frac{144}{169}.$$

Aký zlomok dostaneme na pravej strane?

Ž: *Číslo* 1 *sa dá zapísať v tvare zlomku* $\dfrac{169}{169}$. *Rozdiel zlomkov* $\dfrac{169}{169}$ *a* $\dfrac{144}{169}$ *na pravej strane dá zlomok* $\dfrac{25}{169}$, *takže*

$$(\sin x)^2 = \frac{25}{169}.$$

U: Posledná rovnica určuje druhú mocninu výrazu $\sin x$. My máme vypočítať $\sin x$. Akú úpravu použijeme?

Ž: *Odmocníme výrazy na oboch stranách rovnice a dostaneme výsledok* $\sin x = \dfrac{5}{13}$.

U: Pozor! ***Druhá odmocnina z druhej mocniny*** výrazu je ***absolútna hodnota*** tohto výrazu, t. j.

$$\sqrt{u^2} = |u|.$$

Ž: *Aha! Vždy na to zabudnem. V našom prípade preto platí*

$$\sqrt{(\sin x)^2} = |\sin x|.$$

U: Rovnicu

$$(\sin x)^2 = \frac{25}{169}$$

odmocnením upravíme na tvar

$$|\sin x| = \frac{5}{13}.$$

Ž: *Odkiaľ určíme, či hodnota funkcie sínus bude kladná alebo záporná?*

U: Zabudol si na druhú informáciu v zadaní. Vieme, že $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$. Akú hodnotu v porovnaní s nulou nadobúda funkcia sínus v tomto intervale?

Ž: *Sínus nadobúda* ***záporné hodnoty****.*

U: Preto riešením pre hodnotu funkcie sínus bude záporné číslo $-\frac{5}{13}$, t. j.

$$\sin x = -\frac{5}{13}.$$

Určiť hodnoty funkcií tangens a kotangens už nebude pre teba problém. Využi definície týchto funkcií.

Ž: *Tangens je určený podielom funkcií sínus a kosínus*

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Za sínus stačí dosadiť zlomok $-\frac{5}{13}$ a za funkciu kosínus dosadím zlomok $\frac{12}{13}$. Takže

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

U: Pre výpočet hodnoty funkcie kotangens sa ponúka niekoľko možností.

Ž: *Veď to vypočítam analogicky podľa definície funkcie kotangens. Iba vymením funkcie sínus a kosínus v zlomku. Teda aj číselné hodnoty a dostávam*

$$\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

U: Inou možnosťou výpočtu je použitie vzťahu $\mathrm{tg} x \cdot \mathrm{cotg} x = 1$. Hodnotu funkcie kotangens vypočítame ako prevrátenú hodnotu k hodnote funkcie tangens, t. j.

$$\mathrm{cotg} x = \frac{1}{\mathrm{tg} x} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}.$$

Ak máš hodnotu funkcie tangens, kotangens je jeho prevrátenou hodnotou. Vymeníš číselné hodnoty v čitateli a menovateli zlomku.

Príklad 2: *Bez použitia kalkulačky vypočítajte hodnoty* $\sin x$, $\cos x$ *a* $\mathrm{cotg}x$, *ak* $\mathrm{tg}x = -\dfrac{15}{8}$ *a* $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

U: Ktorú hodnotu by si vypočítal pomerne jednoducho?

Ž: *S funkciou tangens súvisí funkcia kotangens. Platí*

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1.$$

U: Teda

$$\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x}.$$

Dosaď zadanú hodnotu pre $\mathrm{tg}x$.

Ž: *Po dosadení dostanem zložený zlomok, ktorý upravím na jednoduchý tvar:*

$$\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = \frac{1}{-\dfrac{15}{8}} = -\frac{8}{15}.$$

Vlastne vo výslednom zlomku pre kotangens budú číselné hodnoty prehodené v porovnaní s funkciou tangens.

U: Zostáva určiť hodnoty funkcií sínus a kosínus. Ony určujú tangens. Tangens je definovaný ako podiel funkcií sínus a kosínus:

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Podľa zadania je táto hodnota rovná číslu $-\dfrac{15}{8}$, t. j.

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{15}{8}.$$

Ž: *Potom je to ľahké. Stačí porovnať zlomky. Sínus je rovný číslu* -15 *a kosínus je rovný číslu* 8.

U: Nebude to také ľahké. Navyše nemáš dobrý výsledok. Hodnoty funkcií sínus a kosínus môžu byť iba v rozpätí čísel od -1 do 1 vrátane. Rovnica $\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{15}{8}$ je prvou rovnicou pre neznáme hodnoty funkcií sínus a kosínus. Druhú rovnicu dáva ***základný vzťah*** medzi týmito funkciami:

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Ž: *Budeme riešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych?*

U: Áno. Prvá rovnica v sústave má tvar

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{12}{8}$$

a druhou rovnicou je rovnica

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Ž: *Neznámymi v sústave rovníc sú výrazy* $\sin x$ *a* $\cos x$*?*

U: Je vhodné, ak si ich v ďalšom riešení označíme jednoduchšími symbolmi, napríklad

$$a = \sin x, \quad b = \cos x.$$

Sústavu rovníc prepíšeme pomocou neznámych a a b na tvar

$$\frac{a}{b} = -\frac{12}{8}$$

$$b^2 + a^2 = 1.$$

Ž: *Nevyzerá to dobre. V sústave nie je žiadna lineárna rovnica.*

U: Ak si z prvej rovnice sústavy vyjadríš neznámu a, tak sa k nejakej jednoduchšej rovnici dopracujeme. Získaný výraz dosaď do druhej rovnice.

Ž: *Z prvej rovnice* $\frac{a}{b} = -\frac{15}{8}$ *vynásobením výrazov na oboch stranách rovnice neznámou* b *dostanem*

$$a = -\frac{15}{8}b.$$

Tento výraz dosadím za neznámu a *do druhej rovnice*

$$b^2 + (-\frac{15}{8}b)^2 = 1.$$

U: Vidíš, že si to zvládol. Ďalej budem pokračovať ja. Zlomok vo výraze na ľavej strane umocníme. Súčet výrazov na ľavej strane rovnice upravíme na spoločného menovateľa, čo je číslo 64.

$$\boxed{\begin{aligned} &b^2 + \frac{225}{64}b^2 = 1 \\ &\frac{64}{64}b^2 + \frac{225}{64}b^2 = 1 \end{aligned}}$$

Ž: *Sčítať zlomky je už ľahké. Dostanem*

$$\frac{289}{64}b^2 = 1.$$

Viem osamostatniť druhú mocninu neznámej b na ľavej strane. Výrazy na oboch stranách rovnice vynásobím číslom 64 a zároveň predelím číslom 289:

$$b^2 = \frac{64}{289}.$$

Aby sme vypočítali b, odmocníme.

U: Nezabudni, že $\sqrt{b^2} = |b|$. Preto našu rovnicu upravíme na tvar

$$|b| = \sqrt{\frac{64}{289}}.$$

Ž: *Výsledkom druhej odmocniny je číslo* $\frac{8}{17}$.

U: Neznáma b označuje hodnotu funkcie kosínus. Teda

$$|\cos x| = |b| = \frac{8}{17}.$$

Ž: *Odkiaľ určíme, či hodnota kosínus je kladná, alebo záporná?*

U: V zadaní je uvedené, že $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. Pre takéto x je hodnota funkcie kosínus záporná. Preto

$$\cos x = -\frac{8}{17}.$$

Ž: *Neznáma a označovala hodnotu funkcie sínus. Zároveň z riešenia úlohy vieme, že*

$$a = -\frac{12}{8}b.$$

Dosadím za neznámu b a mám

$$sinx = a = -\frac{12}{8}b = -\frac{12}{8}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{12}{17}.$$

Príklad 3: *Zjednodušte výraz a určte, pre ktoré reálne čísla x je definovaný:*

$$\frac{\sin x - (\sin x)^3}{\cos x - (\cos x)^3}.$$

Ž: *V čitateli zlomku by som* **vybral pred zátvorku** *výraz* $\sin x$*. V menovateli sa to dá urobiť analogicky s výrazom* $\cos x$*, tak, ako ho vidíte v rámčeku.*

$$\boxed{\frac{\sin x - (\sin x)^3}{\cos x - (\cos x)^3} = \frac{\sin x \cdot \left(1 - (\sin x)^2\right)}{\cos x \cdot \left(1 - (\cos x)^2\right)}}$$

U: Výrazy v zátvorkách posledného zlomku sa dajú nahradiť jednoduchšími výrazmi. Vieme, že $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$. Ak odčítame od výrazov na oboch stranách rovnice výraz $(\sin x)^2$, dostaneme

$$(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2.$$

Preto namiesto výrazu v zátvorke čitateľa zlomku napíšeme výraz $(\cos x)^2$.

Ž: *Pre výraz v menovateli je to analogické. Výraz* $1 - (\cos x)^2$ *nahradíme výrazom* $(\sin x)^2$*.*

U: Správne. Tieto výrazy sú cyklické.

Ž: *Čo to znamená?*

U: Hodnoty funkcií sínus a kosínus sa dajú navzájom vymeniť bez zmeny výsledku. Po úpravách dostaneme zlomok

$$\frac{\sin x \cdot (\cos x)^2}{\cos x \cdot (\sin x)^2}.$$

Ž: *V tomto zlomku sa dajú* **krátiť** *výrazy* $\sin x$ *v čitateli a* $(\sin x)^2$ *v menovateli zlomku. Zostane výraz* $\sin x$ *v menovateli zlomku. Podobne vykrátime aj výrazy s kosínusom. Zostane výraz* $\cos x$ *v čitateli zlomku. Po krátení dostávam*

$$\frac{\cos x}{1} \cdot \frac{1}{\sin x}.$$

U: Tento výsledok sa ešte dá zjednodušiť. ***Podiel funkcií kosínus a sínus*** definuje funkciu kotangens. Výsledkom úlohy je preto výraz $\mathrm{cotg} x$.

$$\boxed{\frac{\sin x - (\sin x)^3}{\cos x - (\cos x)^3} = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{cotg} x}$$

U: Zostáva určiť ***podmienky*** pre premennú x v pôvodnom výraze.

Ž: *Výraz* $\cos x - (\cos x)^3$ *v menovateli zadaného zlomku nesmie byť rovný nule.*

U: Máš pravdu. Ale tento výraz sme postupne nahradili inými výrazmi. Pre určenie a riešenie podmienok sú výhodnejšie. Sleduj rámček, ktorý rekapituluje všetky naše úpravy. Hlavne výrazy v menovateli prvých troch zlomkov. Ide stále o ten istý výraz vyjadrený v inom tvare.

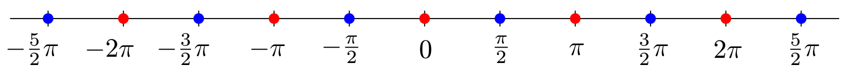
$$\frac{\sin x-(\sin x)^3}{\cos x-(\cos x)^3}=\frac{\sin x\cdot\left(1-(\sin x)^2\right)}{\cos x\cdot(1-(\cos x)^2)}=$$
$$=\frac{\sin x\cdot(\cos x)^2}{\cos x\cdot(\sin x)^2}=\frac{\cos x}{\sin x}=\mathrm{cotg}x$$

Ž: *Máte pravdu. Nahradili sme ho súčinom* $\cos x\cdot(\sin x)^2$*. Teda hodnoty funkcie sínus a kosínus musia byť rôzne od nuly.*

$$\sin x\neq 0,\quad \cos x\neq 0.$$

Sínus nadobúda hodnotu nula pre celočíselné násobky čísla π *a kosínus pre nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$*.*

U: Sleduj na číselnej osi. Celočíselné násobky čísla π sú znázornené červenou farbou a nepárne násobky čísla $\dfrac{\pi}{2}$ modrou farbou. Všetky tieto čísla nepatria do definičného oboru výrazu. Dajú sa vyjadriť jedným tvarom?



Ž: *Opakujú sa vždy o číslo* $\dfrac{\pi}{2}$*. Sú to celočíselné násobky tohto čísla.*

U: Definičným oborom zadaného výrazu je množina všetkých reálnych čísel, okrem celočíselných násobkov čísla $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\mathcal{D}=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Príklad 4: *Zjednodušte výraz a určte, pre ktoré reálne čísla x je definovaný:*

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

U: Zlomky upravíme na ***spoločného menovateľa***. Bude to súčin výrazov $1-\sin x$ a $1+\sin x$ v menovateľoch zadaných zlomkov.

Ž: *Prvý zlomok rozšírime výrazom $1+\sin x$ a druhý zlomok rozšírime výrazom $1-\sin x$. Tak, ako to vidíme v rámčeku.*

$$\boxed{\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}+\frac{\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

U: Súčet zlomkov s rovnakým menovateľom bude zlomok s tým istým menovateľom, pričom čitateľ výsledného zlomku bude súčtom výrazov v čitateľoch daných zlomkov. Dostali sme teda zlomok

$$\frac{\cos x(1+\sin x)+\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}.$$

Pokračuj v úpravách.

Ž: *Výrazy v čitateli* **roznásobím**. *V menovateli použijem vzorec*

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Po týchto úpravách dostanem

$$\frac{\cos x+\cos x\sin x+\cos x-\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}.$$

V čitateli výrazy $\cos x\sin x$ a $-\cos x\sin x$ dajú nulu. Zvyšné dva výrazy možno sčítať. V čitateli zostane výraz $2\cos x$, takže máme

$$\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}.$$

Bude to výsledok?

U: Tento výraz sa ešte dá upraviť. Výraz $1-\sin^2 x$ v menovateli sa dá nahradiť výrazom $\cos^2 x$.

Ž: *Prečo?*

U: Platí základný vzťah medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ak odčítame od výrazov na oboch stranách rovnice výraz $\sin^2 x$, dostaneme

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Dosaď a pokračuj v úpravách.

Ž: *Po dosadení sa kosínus v čitateli* **vykráti** *s jedným kosínusom z menovateľa.*

$$\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}.$$

U: Výraz $\dfrac{2}{\cos x}$ je výsledkom prvej časti úlohy. Zostáva určiť definičný obor výrazu. Ktoré reálne čísla možno dosadiť za premennú x, aby existovali hodnoty všetkých výrazov, ktoré sme získali pri úpravách zadaného výrazu? Od čoho to závisí?

Ž: **V menovateľoch zlomkov nesmú byť nuly**. *To mám napísať všetky podmienky?*

U: Pokiaľ sú rôzne, tak áno. Podmienky $1 - \sin x \neq 0$ a $1 + \sin x \neq 0$ sú obsiahnuté v podmienke pre spoločný menovateľ $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$ zlomku, ktorý sme získali úpravou. Súčin týchto výrazov sme však nahradili výrazom $1 - \sin^2 x$ a ten výrazom $\cos^2 x$. Preto podmienky pre tieto výrazy vyjadrujú to isté, ako dve podmienky zo zadania. Je jednoduchšie vyriešiť podmienku pre posledný výraz. Je totiž jediná, a navyše sa v rôznych úlohách často vyskytuje.

$$\cos x \neq 0$$

Vyrieš túto podmienku.

Ž: *Hodnota funkcie kosínus je rovná nule pre nepárne násobky čísla* $\dfrac{\pi}{2}$*. Tieto reálne čísla teda nepatria do definičného oboru výrazu:*

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

U: Chcem ťa pochváliť za symbolický zápis nepárnych celých čísel. Čísla v tvare $2k$ sú párne, lebo sú deliteľné číslom 2. Preto čísla $2k + 1$ sú nepárne. Sú o jednotku väčšie ako párne čísla.

Príklad 5: *Zjednodušte výraz a určte, pre ktoré reálne čísla x je definovaný:*

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x+1}+\frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x+1}.$$

U: Zapíš hodnoty funkcií tangens a kotangens pomocou hodnôt funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Funkcia tangens je definovaná ako podiel funkcií sínus a kosínus. Funkcia kotangens ako podiel funkcie kosínus a funkcie sínus. Dosadím to teda do zadania tak, ako to vidíme v rámčeku.*

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x+1}+\frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x+1}=\frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2+1}}$$

U: Zlomky umocňujeme tak, že umocníme výraz v čitateli a výraz v menovateli. Ak to urobíme, tak máme

$$\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}+\frac{1}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+1}.$$

Uprav menovatele zložených zlomkov na ***spoločného menovateľa***.

Ž: *V menovateli prvého zloženého zlomku napíšem číslo 1 v tvare zlomku* $\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$. *V menovateli druhého zloženého zlomku napíšem číslo 1 v tvare* $\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$.

$$\boxed{\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}+\frac{1}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}}$$

Ž: *Zlomky v menovateľoch zložených zlomkov sčítam a mám súčet zlomkov*

$$\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}+\frac{1}{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}}.$$

U: Zložené zlomky upravíme na tvar jednoduchých zlomkov. Číslo 1 v čitateli si predstav ako zlomok $\dfrac{1}{1}$. Zložený zlomok, ako vieme, nahradíme jednoduchým zlomkom, v čitateli ktorého bude ***súčin vonkajších výrazov*** zloženého zlomku. V menovateli jednoduchého zlomku bude ***súčin vnútorných výrazov*** zloženého zlomku.

$$\boxed{\frac{\cos^2}{\sin^2 x+\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}}$$

Ž: *Oba zlomky majú rovnakého menovateľa, výraz* $\sin^2 x+\cos^2 x$. *Preto* **sčítam výrazy v čitateli** *týchto zlomkov.*

$$\boxed{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}}$$

Ž: *V čitateli aj menovateli sú rovnaké výrazy. Vykrátim ich.* **Výsledkom bude číslo** 1.

U: Posledné úpravy sme mohli urobiť aj ináč. Sleduj ešte raz posledné zložené zlomky, ktoré sme upravovali na tvar jednoduchých zlomkov:

$$\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}}.$$

Všímaj si výraz $\sin^2 x + \cos^2 x$ v čitateli zlomkov nachádzajúcich sa v menovateli zložených zlomkov. Nedá sa tento výraz nahradiť iným výrazom?

Ž: *Jasné. Hodnota tohto výrazu je stále rovná jednej, lebo platí*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

U: Preto sme mohli časti zložených zlomkov zjednodušiť.

$$\boxed{\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 x}}}$$

Ž: *Vidím, že ak zjednodušíme zložené zlomky, využijeme tento vzťah ešte raz:*

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{1} + \frac{\sin^2 x}{1} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dostali sme ten istý výsledok.

U: Určme ***podmienky***. V menovateli zlomkov sa vyskytol výraz $\sin^2 x + \cos^2 x$. Ten, ako vieme, je rovný číslu 1 pre všetky reálne čísla x. Nadobúda teda nenulové hodnoty. Ktoré ďalšie výrazy sa nachádzajú v menovateli zlomkov?

Ž: *Druhé mocniny hodnôt funkcií sínus a kosínus. V zadaní sú v menovateli výrazy* $\mathrm{tg}^2 x + 1$ *a* $\mathrm{cotg}^2 x + 1$.

U: Máš predstavu, či posledné dva z nich môžu nadobúdať nulovú hodnotu?

Ž: *Netuším.*

U: V oboch výrazoch je súčet druhej mocniny goniometrickej funkcie a čísla 1. Druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla u je však číslo nezáporné:

$$u^2 \geqq 0$$

Platí to aj pre druhé mocniny hodnôt funkcií tangens a kotangens. Ak k tomu prirátame číslo 1, budú hodnoty výrazov minimálne 1, teda

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 \geqq 1, \ \ \operatorname{cotg}^2 x + 1 \geqq 1.$$

Tieto výrazy nenadobúdajú nulovú hodnotu.

Ž: *Takže zostávajú už iba druhé mocniny výrazov* $\sin x$ *a* $\cos x$*, ktoré sú v menovateli zlomkov. Musí platiť*

$$\sin x \neq 0, \ \ \cos x \neq 0.$$

U: Vyriešiť tieto podmienky by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Z prvej podmienky* $\sin x \neq 0$ *vyplýva, že* x *musí byť rôzne od celočíselných násobkov čísla* π*, t. j.*

$$x \neq k\pi.$$

Z druhej podmienky $\cos x \neq 0$ *vyplýva, že* x *musí byť rôzne od nepárnych násobkov čísla* $\frac{\pi}{2}$*, t. j.*

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

U: To znamená, že x je rôzne od celočíselných násobkov čísla $\frac{\pi}{2}$ a

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Príklad 6: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

U: Rovnicu upravíme na taký tvar, aby výraz na ľavej strane obsahoval iba hodnoty funkcie kosínus. Druhú mocninu funkcie sínus vyjadríme zo vzťahu:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ž: *Odčítam od oboch strán rovnice výraz* $\cos^2 x$. *Dostávam*

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

U: Preto v rovnici zo zadania príkladu nahradíme druhú mocninu hodnoty funkcie sínus výrazom $1 - \cos^2 x$ a dostávame

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0.$$

Pokračuj v úprave.

Ž: *Roznásobil by som výrazy na ľavej strane rovnice. Získam rovnicu*

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0.$$

Čo ďalej?

U: Na pravej strane rovnice je nula. Pozri sa na výraz na ľavej strane. Obsahuje tri členy. Výraz $\cos x$, jeho druhú mocninu a absolútny člen. Aký typ rovnice má tieto charakteristiky?

Ž: *Kvadratická rovnica?*

U: Áno, je to ***kvadratická rovnica***. Jasnejšie to bude vidieť, ak zavedieme substitúciu. Výraz $\cos x$ nahradíme neznámou u. Druhá mocnina funkcie kosínus bude druhou mocninou substitučnej neznámej u.

$$\boxed{\cos x = u, \quad \cos^2 x = u^2}$$

Ž: *Po dosadení do poslednej rovnice dostávam rovnicu*

$$2 - 2u^2 + 3u = 0.$$

Obe strany rovnice vynásobím číslom -1 *a usporiadam od kvadratického člena po absolútny člen*

$$-2 + 2u^2 - 3u = 0,$$

$$2u^2 - 3u - 2 = 0.$$

U: Ako určíš korene poslednej rovnice?

Ž: *Použijem vzorec:*

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Určím si koeficienty

$$a = 2, \ \ b = -3, \ \ c = -2.$$

Dosadím do vzorca a mám

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

U: Slušný výkon. Dostaneme dva korene

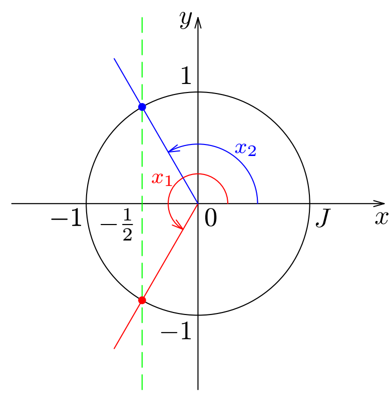
$$u_1 = \frac{3+5}{4} = 2, \ \ u_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Pre každú hodnotu substitučnej neznámej u vyriešime goniometrickú rovnicu, lebo $\cos x = u$. Dosaď za u číslo 2.

Ž: *Ale rovnica $\cos x = 2$ nemá riešenie. Kosínus nadobúda hodnoty iba od -1 do 1. Kosínus nemôže byť nikdy rovný číslu 2.*

U: Zostáva nám vyriešiť rovnicu $\cos x = -\frac{1}{2}$. Využijeme jednotkovú kružnicu. Funkcia kosínus reálnemu číslu x priradí x-ovú súradnicu bodu na jednotkovej kružnici. Preto určíme všetky body jednotkovej kružnice, ktoré majú x-ovú súradnicu rovnú číslu $-\frac{1}{2}$. Do ktorých kvadrantov patria?

Ž: *Kosínus je záporný v II. a v III. kvadrante.*



U: Prezradím ti, že funkcia kosínus nadobúda hodnotu $\frac{1}{2}$ pre x rovné číslu $\frac{\pi}{3}$. Využiješ ju pre určenie hodnoty zodpovedajúcej bodom v II. a v III. kvadrante.

Ž: *V jednom prípade hodnotu $\frac{\pi}{3}$ odpočítam od čísla π, a v druhom prípade ju k číslu π pripočítam:*

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

U: Určil si základné hodnoty riešenia v intervale $\langle 0;\ 2\pi)$. Funkcia kosínus je ***periodická*** s najmenšou periódou 2π. Preto všetky riešenia rovnice dostaneme pripočítaním celočíselných násobkov čísla 2π k základným hodnotám riešenia. Takže

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Príklad 7: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x - 2 = 0$.

U: Funkciu kotangens nahradíme funkciou tangens. Použijeme základný vzťah medzi hodnotami týchto funkcií:

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1.$$

Ž: *Z toho mám*

$$\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x}.$$

Po dosadení do zadanej rovnice dostávame:

$$\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x} - 2 = 0.$$

U: Odstránime zlomky. Obe strany rovnice ***vynásobíme*** výrazom $\mathrm{tg}x$. Potom

$$\mathrm{tg}^2x + 1 - 2\mathrm{tg}x = 0.$$

Akého typu je posledná rovnica?

Ž: *Je to kvadratická rovnica. Členy v rovnici by som usporiadal od kvadratického po absolútny člen.*

$$\mathrm{tg}^2x - 2\mathrm{tg}x + 1 = 0.$$

Zavedieme substitúciu?

U: Nie je to nutné. Pozri sa ešte raz na výraz na ľavej strane rovnice. Pripomína jeden z často používaných vzorcov.

Ž: *Myslíte vzorec* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*?*

U: Áno. Výraz na ľavej strane rovnice sa v našom prípade dá upraviť na tvar

$$\mathrm{tg}^2x - 2\mathrm{tg}x + 1 = (\mathrm{tg}x - 1)^2.$$

Rovnicu potom upravíme

$$(\mathrm{tg}x - 1)^2 = 0.$$

Kedy sa druhá mocnina rovná nule?

Ž: *Druhá mocnina je rovná nule, ak základ mocniny je nula. Preto v našom prípade platí*

$$\mathrm{tg}x - 1 = 0.$$

U: Vyriešime jednoduchú goniometrickú rovnicu $\mathrm{tg}x = 1$. Koľko základných riešení má v intervale $(0;\ \pi)$?

Ž: *Prečo iba v tomto intervale, keď máme riešiť rovnicu v množine reálnych čísel?*

U: Funkcia tangens je ***periodická s najmenšou periódou*** π. Preto hľadáme základné hodnoty riešenia iba v intervale dĺžky π. Všetky riešenia potom vyjadríme ako súčet základného riešenia a celočíselných násobkov čísla π.

Ž: *Už si spomínam. Funkcia tangens nadobúda hodnotu* 1 *pre* $x = \frac{\pi}{4}$.

U: Všetky riešenia rovnice $\mathrm{tg}x = 1$ budú preto vyjadrené v tvare

$$\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sú tieto čísla aj riešením zadanej rovnice?

Ž: *Áno, veď všetky úpravy rovníc boli ekvivalentné.*

U: Na niečo podstatné si však zabudol. Definičným oborom funkcií tangens a kotangens, ktorých hodnoty sú vo výraze na ľavej strane pôvodnej rovnice, nie je množina všetkých reálnych čísel.

Ž: *Jasné! Tangens nie je definovaný pre nepárne násobky čísla* $\frac{\pi}{2}$ *a kotangens pre celočíselné násobky čísla* π. *Korene rovnice však týmto podmienkam vyhovujú.*

U: Množinou koreňov zadanej rovnice je teda

$$\mathcal{K} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Príklad 8: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2 x = 1$.

Ž: *Neviem, ako začať. V zadaní rovnice sú dve rôzne goniometrické funkcie.*

U: Existuje však medzi nimi súvis. Funkcia tangens sa dá vyjadriť ako podiel funkcií sínus a kosínus:

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Využi to pri úprave výrazu na ľavej strane rovnice.

Ž: *Dobre, dosadím do rovnice a zlomok umocním. Umocním zvlášť čitateľa a menovateľa zlomku:*

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1$$

U: Zlomky na ľavej strane rovnice odčítame. Majú spoločného menovateľa. Preto čitateľ bude rozdielom výrazov v čitateľoch daných zlomkov, teda

$$\frac{1 - (\sin x)^2}{\cos^2 x} = 1.$$

Ako sa dá vyjadriť výraz $1 - (\sin x)^2$ v čitateli zlomku?

Ž: *Viem, že* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. *Preto výraz* $1 - (\sin x)^2$ *je vlastne* $\cos^2 x$.

U: Dostávame takto rovnicu

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1.$$

Ž: *Ale zlomok na ľavej strane rovnice je rovný jednej. Z rovnice* $\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$ *dostaneme výrok* $1 = 1$. *Taký výrok platí vždy.*

U: Áno platí vždy, pokiaľ sú definované výrazy na ľavej a pravej strane rovnice. Zadaná rovnica však obsahuje na ľavej strane zlomok $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ž: *Aha! V menovateli zlomku nesmie byť nula. Preto hodnota funkcie kosínus musí byť rôzna od nuly.*

$$\cos x \neq 0.$$

Čo bude riešením podmienky?

U: Hodnota argumentu x nesmie byť ***nepárnym násobkom čísla*** $\dfrac{\pi}{2}$, t. j.

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ž: *Taká istá podmienka platí aj pre funkciu tangens. Vyjadrili sme ju ako podiel funkcií sínus a kosínus. Preto kosínus musí byť rôzny od nuly.*

U: Iné podmienky v procese úprav zadanej rovnice nevznikli. Preto riešením zadanej rovnice je množina všetkých reálnych čísel, okrem nepárnych násobkov čísla $\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\mathcal{K} = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Príklad 9: *Načrtnite graf funkcie* $f: y = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x$.

Ž: *Budeme násobiť hodnoty funkcie tangens a kotanges pre niekoľko hodnôt argumentu* x*?*

U: Výhodnejšie je upraviť výraz na pravej strane v predpise funkcie. Ako vieme, súčin hodnôt funkcií tangens a kotangens je jedna, t. j.

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{cotg}x = 1.$$

Ž: *Ale to je potom jednoduchá úloha. Po dosadení do predpisu funkcie dostanem konštantnú funkciu*

$$f: y = 1.$$

Jej grafom bude **priamka rovnobežná s x-ovou osou**. *Priamka bude pretínať* y*-ovú os v bode* 1*.*

U: Nebude to celá priamka. Nezabúdaj, že funkcie tangens a kotangens sú definované ako zlomky. Ich definičnými obormi nie je množina všetkých reálnych čísel.

Ž: *Na to vždy zabudnem. Keď v zadaní nevidím zlomky, tak sa v riešení vždy ponáhľam.*

U: Tie zlomky sú v pojmoch tangens a kotangens. Ako vyzerajú?

Ž: *Funkcia tangens je definovaná ako podiel funkcií sínus a kosínus*

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Preto hodnoty funkcie kosínus musia byť nenulové, čiže

$$\cos x \neq 0.$$

Kosínus nadobúda nulovú hodnotu pre **nepárne násobky čísla** $\frac{\pi}{2}$.

U: Preto tieto čísla nepatria do definičného oboru funkcie f. Nepatria tam aj ďalšie čísla, ktoré súvisia s funkciou kotangens.

Ž: *Funkcia kotangens je podielom hodnôt funkcií kosínus a sínus. Preto hodnoty funkcie sínus musia byť nenulové. Zapíšem to v tvare*

$$\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sin x \neq 0.$$

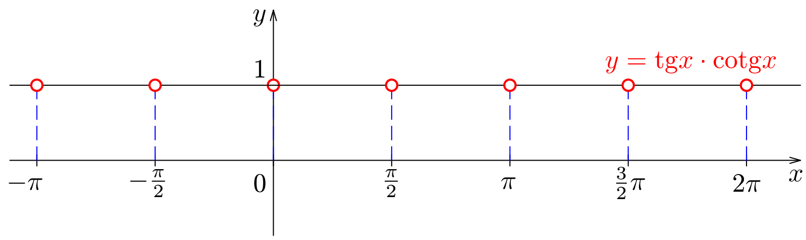
Sínus nadobúda nulovú hodnotu pre **celočíselné násobky čísla** π.

U: Od funkcie tangens sme z definičného oboru funkcie f vylúčili čísla v tvare $(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Od funkcie kotangens čísla v tvare $k\pi$. Obe tieto skupiny čísel možno zapísať jedným tvarom $k\frac{\pi}{2}$. Preto

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ž: *Ako sa to prejaví na grafe?*

U: Líniou grafu bude priamka, ako si to už povedal. Vyznačíme na nej ***prázdne krúžky*** vo všetkých bodoch, ktorých x-ová súradnica je celočíselným násobkom čísla $\dfrac{\pi}{2}$.



Príklad 10: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $3\cos^2 x + \sin x \cos x + 2\sin^2 x = 2$.

U: V rovnici sa vyskytujú aj druhé mocniny goniometrických funkcií sínus a kosínus. Spája ich základný vzťah

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vyjadri odtiaľ $\sin^2 x$ a dosaď do zadanej rovnice.

Ž: *Výraz* $\sin^2 x$ *v rovnici*

$$3\cos^2 x + \sin x \cos x + 2\sin^2 x = 2$$

nahradím výrazom $1 - \cos^2 x$.

$$\boxed{3\cos^2 x + \sin x \cos x + 2\left(1 - \cos^2 x\right) = 2}$$

U: Potom výrazy roznásobíme a máme

$$3\cos^2 x + \sin x \cos x + 2 - 2\cos^2 x = 2.$$

Pokračuj v ďalších úpravách.

Ž: *Od výrazov na oboch stranách rovnice odčítam číslo* 2

$$3\cos^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Rozdiel výrazov $3\cos^2 x$ *a* $2\cos^2 x$ *na ľavej strane rovnice je rovný* $\cos^2 x$, *preto dostávam*

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Na ľavej strane rovnice stále mám dve funkcie.

U: Výraz je však jednoduchší a navyše sa porovnáva s nulou. Upravíme ho na ***súčin dvoch výrazov***. Pred zátvorku vyberieme výraz $\cos x$.

$$\cos x(\cos x + \sin x) = 0.$$

Kedy sa súčin dvoch výrazov rovná nule?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je rovný nule, ak sa jeden alebo druhý z výrazov rovná nule.*

U: Teda buď sa rovná nule kosínus, alebo súčet hodnôt funkcií sínus a kosínus.

$$\cos x = 0$$

alebo

$$\cos x + \sin x = 0.$$

U: Prvú rovnicu určite zvládneš sám.

Ž: *Kosínus je rovný nule, ak je neznáma* x **nepárnym násobkom čísla** $\frac{\pi}{2}$, *preto*

$$\mathcal{K}_1 = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ako vyriešime druhú rovnicu?

U: Rovnicu $\cos x + \sin x = 0$ upravíme na rovnicu, v ktorej neznámou funkciou bude funkcia tangens. Najskôr odčítame hodnotu funkcie kosínus

$$\sin x = -\cos x.$$

Teraz rovnicu vydelíme výrazom $\cos x$ a máme

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1.$$

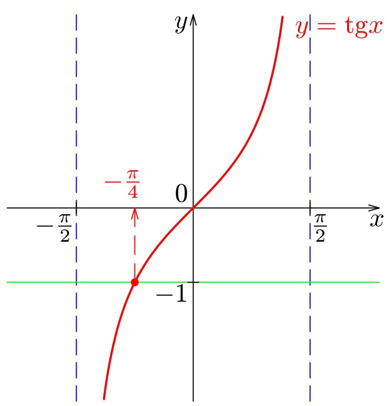
Podiel funkcií sínus a kosínus na ľavej strane je podľa definície hodnotou funkcie tangens.

$$\mathrm{tg} x = -1.$$

Ž: *Mohli sme deliť výrazom* $\cos x$*?*

U: Áno. Funkcie sínus a kosínus nenadobúdajú naraz hodnotu nula. Také reálne čísla x, pre ktoré $\cos x$ sa rovná nule, nie sú riešením rovnice $\sin x = -\cos x$. Preto delenie výrazom $\cos x$ bolo ekvivalentnou úpravou rovnice.
Koľko základných riešení má rovnica $\mathrm{tg} x = -1$?

Ž: *Má* **jedno základné riešenie**, *ktoré odpovedá bodu na grafe v otvorenom intervale* $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.



U: Táto hodnota neznámej x je $-\frac{\pi}{4}$. Funkcia tangens je ***periodická s najmenšou periódou*** π. Preto všetky riešenia získame pripočítaním celočíselných násobkov čísla π k základnej hodnote riešenia. Preto

$$\mathcal{K}_2 = \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ž: *Riešenie zadanej rovnice bude* **zjednotením množín** *koreňov* $\mathcal{K}_1$ *a* $\mathcal{K}_2$*?*

U: Máš pravdu

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2 = \left\{2k+1)\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ž: *Zmenilo by sa riešenie rovnice, keby som zo vzťahu* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *na začiatku riešenia rovnice vyjadril* $\cos^2 x$*?*

U: Vyskúšaj to.

Ž: *Namiesto* $\cos^2 x$ *dosadím do rovnice*

$$3\cos^2 x + \sin x \cos x + 2\sin^2 x = 2$$

výraz $1 - \sin^2 x$.

$$\boxed{3\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x \cos x + 2\sin 2x = 2}$$

Ž: *Roznásobím*

$$3 - 3\sin^2 x + \sin x \cos x + 2\sin 2x = 2.$$

Odčítam číslo 2

$$1 - 3\sin^2 x + \sin x \cos x + 2\sin 2x = 0.$$

U: Súčet výrazov $-3\sin^2 x$ a $2\sin^2 x$ nahradíme výrazom $-\sin^2 x$, preto máme rovnicu

$$1 - \sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Ž: *Ale* $1 - \sin^2 x$ *je* $\cos^2 x$, *takže rovnica má tvar*

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Je to tvar rovnice, ku ktorej sme došli aj pri prvom spôsobe riešenia.