Nekonečné rady

Mgr. Jana Králiková

U: Ernest Hemingway povedal:
„Najľahší spôsob ako stratiť dôveru a úctu mladých je dávať im ***nekonečné rady***."

Ž: *Poskytnete mi nekonečné rady o nekonečných radoch?*

U: Tých rád nebude zas až tak veľa. Ale naozaj budú o nekonečných radoch. Počul si o nich?

Ž: *Áno.* **Ak je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak výraz**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

sa nazýva nekonečný rad.
Čísla $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n, \dots$ *sa nazývajú* **členy nekonečného radu**.

U: Hádam poznáš skrátený zápis súčtu konečného počtu sčítancov:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Ž: *Poznám. Symbol* $\sum$ *je veľké grécke písmeno a používa sa na označenie súčtu, sumy.*

U: Správne. Ak sčítancov je nekonečne veľa, tak dostávaš nekonečný rad. Potom môžeš použiť takýto skrátený zápis:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ž: *Prečo sme z postupností prešli na rady? Ako sa dajú rady využiť?*

U: Aby som ti mohol na túto otázku odpovedať, najskôr ťa potrápim nasledujúcim príkladom:

Blška skočí pol metra. Ďalší jej skok už bude menší, bude mať len štvrtinu metra. Každý ďalší skok bude mať polovicu dĺžky predchádzajúceho skoku. Akú vzdialenosť blška preskáče, ak bude takto skákať do nekonečna?

Ž: *No predsa nekonečne veľkú vzdialenosť. Nedá sa to vyčísliť. Blcha bude len skákať a skákať. Síce stále menšími skokmi, ale celková preskákaná vzdialenosť bude nekonečne veľká.*

U: Urobí nekonečne veľa skokov, zrejme jej to aj potrvá nekonečne dlho, ale vzdialenosť, ktorú preskáče, bude mať 1 meter.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$

Ž: *To je nejaké divné.*

U: Príklad o blške pochopíš lepšie, keď sa zoznámiš s teóriou nekonečných radov.

Ž: *Tak poďme na to.*

U: Definujme si postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jej členy budú takéto súčty členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$s_1 = a_1,$
$s_2 = a_1 + a_2,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$
$\vdots$
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Ž: *Členy tejto postupnosti sú rady?*

U: Vlastne áno. Rad to je súčet. Členy postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazývajú čiastočné súčty nekonečného radu.

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{je } n\text{-tý čiastočný súčet nekonečného radu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.}$$

Ž: **Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je** *teda* **postupnosť čiastočných súčtov nekonečného radu.**

U: Presne tak. Ak má táto postupnosť limitu, tak ju nazývame ***súčtom nekonečného radu*** a označujeme ju ***s***.

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Ž: *Aj pri radoch používame pojmy* **konvergentnosť** *a* **divergentnosť***?*

U: Áno. ***Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konvergentný práve vtedy, ak je konvergentná postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*** Ak je postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentná, tak hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Ž: *Takže ak je s nejaké konkrétne reálne číslo, tak je rad konvergetný. Ak $s = +\infty$ alebo $s = -\infty$ alebo s neexistuje, tak je rad divergentný.*

U: Vráťme sa k príkladu o blške. Vytvor z postupnosti dĺžok skokov postupnosť čiastočných súčtov.

Ž: *Dobre. Postupnosť dĺžok skokov je takáto:*

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots\right\}.$$

Pripravím si čiastočné súčty:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2},$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$
$$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32},\ \ldots$$

Postupnosť čiastočných súčtov je:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \ldots\right\}.$$

U: Dobre. Vedel by si vytvoriť vzorce pre n-té členy oboch postupností?

Ž: *Pre postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je to jednoduché. Každý člen okrem prvého je polovicou predchádzajúceho člena. Tak je to v zadaní. Vzorec bude teda:*

$$a_n = \frac{1}{2^n}.$$

U: Správne. A čo postupnosť čiastočných súčtov? Vieš odhadnúť vzorec pre jej n-tý člen?

Ž: *Zdá sa mi, že čitateľ je stále o jedna menší než menovateľ. Takže vzorec by mohol byť:*

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

U: Odhadol si to dobre. Platnosť tohto vzťahu dokážeš ***matematickou indukciou***. Nechám to na tvoju samostatnú prácu. Mňa teraz zaujíma konvergencia alebo divergencia týchto postupností. Vedel by si mi niečo o tom povedať?

Ž: *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná, pretože má limitu rovnú nule:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

A limitu postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *skúsim vypočítať:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1.$$

U: Dobre. Zhrniem to. Vypočítal si, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Teraz je ti už asi jasné, prečo blška preskáče dohromady len 1 meter.

U: V príklade o blške si vypočítal limity jednotlivých postupností. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mala limitu rovnú nule. Nula nevyšla náhodou. Platí totiž veta:

Ak nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje, tak limita postupnosti*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***sa rovná nule.***

$$\boxed{\text{Ak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje, tak } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Táto veta sa volá aj ***veta o nutnej podmienke konvergencii nekonečného radu***.

Ž: *Znamená to, že limita sa nemôže rovnať ani trojke ani sedmičke, len nutne nule?*

U: Áno. Veta sa využíva aj pri dokazovaní divergencie nejakého radu. Ak vieš, že postupnosť, z ktorej je rad vytvorený, diverguje alebo má limitu rôznu od nuly, tak to znamená, že príslušný rad je divergentný.

Ž: *Lebo keby bol konvergentný, tak limita postupnosti by musela byť nulová.*

U: Presne tak. Je dôležité vedieť, že ak je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak je príslušný rad divergentný. Ale ak je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak o správaní sa príslušného radu nemôžeme usúdiť nič.

Ž: *Tomu nerozumiem.*

U: Veta neplatí obrátene. Sú postupnosti, ktoré majú nulovú limitu, ale nekonečný rad vytvorený z ich členov nie je konvergentný. Hovoríme, že ***podmienka*** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ***je nutnou, nie však postačujúcou podmienkou pre konvergenciu radu.***

Ž: *A ukážete mi takú postupnosť?*

U: Áno. Prídeme k tomu.

U: Nekonečné rady sú vytvorené ako nekonečné súčty členov nejakej postupnosti.
Podľa toho, aká je táto postupnosť, môžeme vytvoriť napríklad:

- ***nekonečný harmonický rad*** – priradený postupnosti prevrátených hodnôt $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,
- ***nekonečný aritmetický rad*** – priradený ***aritmetickej postupnosti*** s diferenciou d,
- ***nekonečný geometrický rad*** – priradený ***geometrickej postupnosti*** s kvocientom q.

Ž: *Budeme sa zaoberať tým, kedy sú tieto rady konvergentné?*

U: Áno. Harmonický rad je divergentný. Postupnosť prevrátených hodnôt je síce konvergentná a jej limita je nula, ale harmonický rad diverguje do plus nekonečna, napriek tomu, že je splnená nutná podmienka konvergencie.

Ž: *Aha, takže toto je príklad toho, že veta o nutnej podmienke neplatí obrátene.*

U: Áno. Teraz prejdeme na nekonečný aritmetický rad. Ak je aritmetická postupnosť rastúca, teda jej diferencia je kladná, tak rad diverguje do plus nekonečna.

Ž: *Rozumiem. Členy postupnosti sú stále väčšie, súčty narastajú. Ak je aritmetická postupnosť klesajúca, tak rad asi diverguje do mínus nekonečna. Ale rad diverguje, aj keď je postupnosť konštantná, nie?*

U: S jedinou výnimkou. Ak je diferencia rovná nule a aj prvý člen aritmetickej postupnosti je nula, tak je nekonečný aritmetický rad konvergentný.

Ž: *Jasné, nie je ťažké uhádnuť k akému číslu rad konverguje, keď všetky sčítance sú nuly. A ako to vyzerá s nekonečným geometrickým radom?*

U: Tu sa trošku zdržíme. Ak je prvý člen geometrickej postupnosti rovný nule a kvocient je ľubovoľné reálne číslo, tak je rad konvergentný.

Ž: *Dostanem rovnakú konštantnú postupnosť samých núl – ako pri aritmetickej postupnosti. Súčet nekonečne veľa núl bude zas len nula. Ešte by to mohlo byť aj naopak. Prvý člen nenulový a kvocient rovný nule. Aj vtedy dostanem samé nuly – teda, aspoň od druhého člena.*

U: Máš pravdu. Tento prípad ale zahrnieme v nasledujúcej vete:
Ak je prvý člen a_1 geometrickej postupnosti nenulový a jej kvocient q je z intervalu $(-1;+1)$, tak je nekonečný geometrický rad

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

konvergentný a jeho súčet s sa počíta podľa vzorca:

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ž: *Teda pre $q \in (-1;+1)$ je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$. V ostatných prípadoch je nekonečný geometrický rad divergentný?*

U: Áno, pretože ak kvocient $q = 1$, tak limita postupnosti sa rovná prvému členu. Ak je prvý člen nenulový, tak rad musí byť podľa nutnej podmienky konvergencie divergentný.

Ž: *A pre iné hodnoty kvocientu je aj samotná geometrická postupnosť divergentná, takže aj rad z nej vytvorený diverguje.*

U: Presne tak.

U: Vráťme sa teraz znovu k príkladu o blške. Aká bola postupnosť dĺžok jej skokov?

Ž: *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrickou postupnosťou s prvým členom $a_1 = \dfrac{1}{2}$ a kvocientom $q = \dfrac{1}{2}$.*

U: Správne. Prvý člen je nenulový, kvocient je z intervalu $(-1,+1)$, takže postupnosť čiastočných súčtov bude konvergentná a jej limita, teda súčet nekonečného geometrického radu môžeš vypočítať podľa spomenutého vzorca.

Ž: *Dobre.*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$$

A je to. Pomocou tohto vzorca to šlo rýchlejšie ako odvádzanie na začiatku.

U: Tak si ho dobre zapamätaj.

Ž: *Poznám pravidlá pre počítanie s limitami postupností. Sú aj nejaké pravidlá pre počítanie s nekonečnými radmi?*

U: Dobrá otázka. Áno, sú. Ale, rovnako ako pri limitách, musia byť najprv splnené nejaké podmienky.

Ž: *Limita súčtu dvoch postupností sa rovná súčtu limít týchto postupností. Za podmienky, že existujú limity postupností, ktoré sa sčítavali.*

U: Presne tak. Postupnosti museli byť konvergentné. Potom si mohol vytvárať ich súčet, rozdiel, násobok, súčin a za ďalších podmienok aj podiel.

U: A ako to bude s radmi?

U: Základná operácia s nekonečnými radmi je súčet dvoch konvergentných radov:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***a*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***sú dva konvergentné rady a nech ich súčty sú*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ ***a*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = t$***. Potom je konvergentný aj rad*** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ***a platí:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=s+t.$$

Ž: *Toto bolo využitie* **asociatívnosti** *a* **komutatívnosti** *sčítavania, však? Sprehádzať poradie, prezátvorkovať podľa potreby, vypočítať súčet každej zátvorky a potom to dať dohromady.*

U: Áno. Ale asociatívnosť sčítavania pre nekonečne veľa sčítancov všeobecne neplatí. Len za podmienky, že súčty jednotlivých zátvoriek existujú. Nasledujúcu vetu môžeš chápať ako analógiu distributívneho zákona:

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***je konvergentný a jeho súčet je*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$***. Potom konverguje aj rad*** $\sum_{n=1}^{\infty}(k\cdot a_n)$***, pre ľubovoľné*** $k\in\mathbb{R}$ ***a jeho súčet je:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k\cdot a_n)=k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n=k\cdot s.$$

Ž: *Pomocou týchto dvoch pravidiel by som vedel vytvoriť aj tretie - pre rozdiel radov.*

U: Pre rozdiel konvergentných radov. Nezabudni na podmienku.

Ž: *Má nekonečný geometrický rad nejaké rozumné využitie?*

U: Pravdaže. Pomocou neho sa racionálne číslo s periodickým desatinným rozvojom dá zapísať v tvare zlomku. Nekonečný geometrický rad nájdeš aj v geometrických úlohách s nekonečným množstvom vpísaných útvarov… takéto úlohy nájdeš v časti Príklady.

Príklad D1: *Dokážte vetu o nutnej podmienke konvergencie nekonečného radu:*

Ak nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

U: Veta hovorí, že ak nekonečný rad konverguje, tak postupnosť, z ktorej je rad vytvorený, je tiež konvergentná s limitou rovnou nule.

Ž: *Preto sa to volá nutná podmienka, že limita sa nutne rovná nule? Nie inému číslu?*

U: Áno. Dôkaz nie je náročný. Stačí, keď si uvedomíš, čo to znamená, že rad konverguje.

Ž: *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je vlastne súčet všetkých členov postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Ak si vytvorím* **postupnosť čiastočných súčtov** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, *tak limita tejto postupnosti je súčet radu.*

U: Áno. Z predpokladu konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva, že táto limita existuje:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,\ \ s \in \mathbb{R},\ \text{pričom pre každé } n \in \mathbb{N}:\ \ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ž: *Ale ešte stále nevidím, prečo by postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *musela mať limitu rovnú len nule.*

U: Napíš si všeobecné predpisy pre dva za sebou idúce členy postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Členy sú čiastočné súčty, takže napríklad:*
$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1},$
$s_n \ \ = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$

U: V čom sa líšia tieto dva členy?

Ž: *Predpis pre* s_n *obsahuje navyše aj sčítanec* a_n.

U: Dobre. Vyjadri si teraz člen rozdiel $s_n - s_{n-1}$.

Ž: *Výsledkom bude* a_n*:*

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

U: A teraz vypočítaj limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej je n-tý člen daný týmto predpisom.

Ž: *Dostanem:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \cdots$$

A teraz čo?

U: Podľa predpokladu vety je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, takže môžeš využiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž: *Aha. Keďže* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ *a tiež* $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, *tak*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

U: Dôkaz je hotový.

Príklad D2: *Dokážte, že pre súčet s konvergentného geometrického radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$, *pre* $a_1 \neq 0$ *a* $q \in (-1;+1)$ *platí:*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: Aký je predpis pre n-tý člen ***geometrickej postupnosti*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Ž: *Ak jej prvý člen je* a_1 *a kvocient je* q, *tak* n*-tý člen je daný predpisom:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: Správne. Nekonečný geometrický rad vytvorený z členov tejto postupnosti je potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ako je definovaný súčet nekonečného radu?

Ž: *Súčet radu je limita* **postupnosti čiastočných súčtov** *členov postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

U: To bolo síce správne, ale veľmi neprehľadné.

Ž: *K postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *si vytvoríme postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tak, že každý člen* s_n *je súčet prvých* n *členov postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Limita takejto postupnosti sa nazýva súčet radu.*

U: To bolo lepšie. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická. Ako sa vypočíta súčet jej prvých n členov?

Ž: *Ak* $q \neq 1$, *tak vzorec pre súčet prvých* n *členov geometrickej postupnosti je*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

U: Dobre. Limita tohto výrazu je súčet radu. Máš dokázať, že má tvar $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Ž: *Takže vypočítam limitu:*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \cdots$$

U: V menovateli máš konštantnú hodnotu $q - 1$ a a_1 je tiež konštanta.

Ž: *Môžem ich teda vybrať pred limitu:*

$$\cdots = \frac{a_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty} (q^n - 1) = \frac{a_1}{q-1} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} q^n - \lim_{n\to\infty} 1 \right) = \cdots$$

U: Ak kvocient geometrickej postupnosti je z intervalu $(-1,+1)$, tak je geometrická postupnosť konvergentná a jej limita je nula.

Ž: *Aha. Takže* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ *a dostanem:*

$$\cdots = \frac{a_1}{q-1} \cdot (0 - 1) = \frac{a_1}{q-1} \cdot (-1) = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: A to je to, čo sme mali dokázať.

Príklad D3: *Dokážte, že harmonický rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *je divergentný.*

Ž: **Harmonický rad** *vznikol z postupnosti prevrátených hodnôt prirodzených čísel*

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\dots\right\},$$

takže je daný ako súčet týchto prevrátených hodnôt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

U: Máme dokázať, že rad diverguje. Dokážeme to sporom.

Ž: *Predpokladáme teda, že rad konverguje. A ako to využijeme?*

U: Uvidíš. Najprv si vytvoríme postupnosť čiastočných súčtov:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n}\right\}.$$

Ako vyzerajú členy s_n a s_{2n} tejto postupnosti?

Ž: *Člen* s_n *je súčet prevrátených hodnôt od* 1 *po* $\frac{1}{n}$. *A člen* s_{2n} *je súčet prevrátených hodnôt od* 1 *až po* $\frac{1}{2n}$*:*

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n},$$

$$s_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}\quad+\quad\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\dots+\frac{1}{2n}.$$

U: Výborne. Teraz vytvor rozdiel $s_{2n}-s_n$.

Ž: *To zvládnem. Prvých* n *prevrátených hodnôt sa od seba odpočíta a ostane:*

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\dots+\frac{1}{2n}.$$

U: Uvedom si, že pre rastúci menovateľ hodnoty týchto zlomkov klesajú.

Ž: *To mi je jasné. Z týchto sčítancov má najväčšiu hodnotu zlomok* $\frac{1}{n+1}$ *a najmenšiu hodnotu má zlomok* $\frac{1}{2n}$.

U: Áno. Môžeme to využiť. Všetky uvedené zlomky, okrem posledného, sú väčšie ako práve ten posledný zlomok $\frac{1}{2n}$:

$$s_{2n}-s_n=\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\dots}_{\text{všetky tieto zlomky sú väčšie ako }\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n}}_{\text{všetkých zlomkov je }n}\quad>\quad n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Ž: *Uf. Keďže sčítancov je n a každý z nich je väčší alebo rovný než $\frac{1}{2n}$, tak rozdiel $s_{2n} - s_n$ je určite väčší ako $n \cdot \frac{1}{2n}$.*

U: Áno. Dostali sme teda, že

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad s_{2n} > \frac{1}{2} + s_n.$$

A teraz využijeme predpoklad, že harmonický rad konverguje.

Ž: *Ak rad konverguje, tak postupnosť čiastočných súčtov má limitu.*

U: Áno. Limita postupnosti čiastočných súčtov je súčet radu. Nech je tento súčet s. Platí potom:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Ž: *Rozumiem. Ak sa n blíži do nekonečna, tak $\lim_{n\to\infty} s_n$ a aj $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ majú rovnakú hodnotu.*

U: Zatiaľ sme došli k tomu, že $s_{2n} > \frac{1}{2} + s_n$. Po limitnom prechode, ak $n \to \infty$, dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} > \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} s_n,$$

$$s > \frac{1}{2} + s.$$

Ž: *A to je spor. Žiadne reálne číslo sa nerovná súčtu jednej polovice a seba samého.*

U: Správne. Vychádzali sme z toho, že harmonický rad je konvergentný, teda existuje také reálne číslo ***s***, ktoré je limitou postupnosti jeho čiastočných súčtov. Došli sme ale k sporu. Predpoklad konvergentnosti harmonického radu teda nie je pravdivý.

Ž: **Harmonický rad je divergentný.**

U: Áno. Už len poznamenám, že názov harmonického radu je odvodený z toho, že každý jeho člen (okrem prvého) je ***harmonickým priemerom*** svojich dvoch susedných členov.

Príklad 1: *Zistite, ktoré z nasledujúcich nekonečných radov sú konvergentné a pre konvergentné rady vypočítajte ich súčet:*

a) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots,$

b) $\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^3+\cdots+\left(\sqrt{5}-1\right)^n+\ldots,$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$

U: V každom z týchto príkladov najprv urč z akej postupnosti je nekonečný rad vytvorený.

Ž: **a)** *Rad je daný ako súčet mocnín čísla* $\dfrac{1}{3}$. *Postupnosť, z ktorej vznikol, by mohla byť geometrická postupnosť s prvým členom* $a_1=1$ *a kvocientom* $q=\dfrac{1}{3}$.

U: Správne. Ide teda o nekonečný geometrický rad. Pre akú hodnotu kvocientu je takýto rad konvergentný?

Ž: *Rad je konvergentný, ak kvocient geometrickej postupnosti je z intervalu* $(-1;+1)$. *A hodnota* $\dfrac{1}{3}$ *z tohto intervalu je, takže rad je konvergentý.*

U: Áno. Môžeš použiť vzorec pre výpočet jeho súčtu.

Ž: *Súčet daného nekonečného radu je*

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Ž: **b)** *Postupnosť, z ktorej je rad vytvorený, tvoria mocniny čísla* $\left(\sqrt{5}-1\right)$. *Aj to je geometrická postupnosť. Jej prvý člen a aj jej kvocient sa rovnajú číslu* $\left(\sqrt{5}-1\right)$. *Môžem tieto hodnoty dosadiť do vzorca pre súčet radu.*

U: Vzorec $s=\dfrac{a_1}{1-q}$ pre súčet nekonečného geometrického radu môžeš použiť len vtedy, ak $|q|<1$, teda ak $q\in(-1,+1)$. Platí to?

Ž: *Odmocnina z* 5 *je väčšia ako* 2. *A ak odpočítam* 1, *dostanem hodnotu väčšiu ako* 1. *Tesne vedľa. Pre takýto kvocient je rad divergentný.*

Ž: **c)** *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *je daný ako súčet mocnín čísla* (-1). *Mocniny čísel alebo výrazov, to je geometrická postupnosť. Jej prvý člen je* $a_1=-1$ *a kvocient* q *je tiež* -1.

U: Ako sa správa geometrická postupnosť s kvocientom -1 a nenulovým prvým členom?

Ž: *Postupnosť je divergentná, limita neexistuje, takže aj rad vytvorený z tejto postupnosti je divergentný.*

U: Len pre zaujímavosť: spomínaná geometrická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosť jej čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú takéto členy:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots\},$$
$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots\}.$$

Divergenciu oboch pekne vidieť.

Úloha : *Zistite, ktoré z nasledujúcich nekonečných radov sú konvergentné a pre konvergentné rady vypočítajte ich súčet:*

a) $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^n + \dots,$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{-n}.$

Výsledok:

a) konvergetný, $s = \sqrt{7} + 2,$

b) konvergentný, $s = \dfrac{1}{9}.$

Príklad 2: *Zistite, či je nekonečný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ *konvergentný.*

Ž: *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ *je daný ako súčet prevrátených hodnôt párnych čísel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{2n} + \ldots$$

Mohli by prevrátené hodnoty párnych čísel tvoriť geometrickú postupnosť?

U: Nie. Nejde o geometrickú postupnosť. Neexistuje taká hodnota kvocientu, aby si pomocou nej a prvého člena získal všetky ostatné členy.

Ž: *Tak ako mám zistiť či tento rad konverguje alebo diverguje?*

U: Poradím ti. Rad to je súčet nekonečného počtu sčítancov. Ak majú sčítance spoločného deliteľa, môžeš ho vybrať pred zátvorku.

Ž: *V tomto prípade sú všetky sčítance násobkom jednej polovice. Mám ju vybrať von?*

U: Áno. Takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dostaneš násobok radu, o ktorom by si niečo mohol vedieť.

Ž: *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *sa nazýva* **harmonický rad**. *Vznikol z postupnosti prevrátených hodnôt prirodzených čísel. Takýto rad je divergentný.*

U: Áno. A aj jeho nenulový násobok je divergentným radom. Vieš prečo?

Ž: *Viem, že ak je rad konvergentný, tak je konvergentný aj ľubovoľný násobok tohto radu. Asi niečo podobné platí aj pre divergentné rady.*

U: Máš pravdu, ak by si totiž predpokladal, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ je konvergentný, tak potom aj ľubovoľný jeho násobok je konvergentným radom. Ak ľubovoľný násobok je konvergentným radom, tak aj jeho dvojnásobok je konvergentným radom. Dostal by si:

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ž: *Má byť konvergentný, ale harmonický rad je predsa divergentný. To je spor s predpokladom, že násobok divergentného radu je konvergentným radom.*

U: Presne tak. ***Nenulový násobok divergentného radu je tiež divergentným radom.***

Úloha : *Zistite, či je nekonečný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ *konvergentný:*

Výsledok: *Rad je divergentný.*

Príklad 3: *Vypočítajte súčet nekonečných geometrických radov:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5 \cdot 3^{n-1}}$.

U: Akým vzorcom je vyjadrený n-tý člen geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Ž: *Ak má geometrická postupnosť prvý člen a_1 a kvocient q, tak vzorec pre jej n-tý člen je*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: Správne. Nekonečný geometrický rad vytvorený z členov tejto postupnosti je potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}.$$

A ako sa určí súčet konvergentného nekonečného geometrického radu?

Ž: *Súčet dostaneme pomocou vzorca*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: To je v prípade, že $|q| < 1$. V každom z týchto príkladov si musíš uvedomiť hodnotu prvého člena a kvocientu. Dosadiť ich do vzorca už nebude problém.

Ž: **a)** *Postupnosť, z ktorej vznikol rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *má kvocient* $q = \frac{1}{2}$. *Rad je konvergentný, lebo* $|q| < 1$.

U: Prvý člen môžeš získať tak, že si porovnáš všeobecný predpis pre n-tý člen s predpisom, ktorý máš uvedený:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} ? \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Odtiaľ pekne vidieť, že kvocient je $\frac{1}{2}$ a prvý člen musí byť 1.

Ž: *Alebo ho môžem získať dosadením čísla 1 za n v predpise pre n-tý člen. Takto:*

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1.$$

Tiež mi vyšla jednotka.

U: Dobre. Vypočítaj súčet radu.

Ž:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Ž: **b)** *Mám vypočítať súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$. *Skúsim si výraz* $\frac{2}{3^{n-1}}$ *upraviť na tvar* $a_1 \cdot q^{n-1}$*:*

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

U: Prvý člen je teda 2 a kvocient je $\frac{1}{3}$. Vypočítaj súčet radu.

Ž:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}} = s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Ž: **c)** *Rad je daný predpisom* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5\cdot 3^{n-1}}$. *To bude fuška získať odtiaľ* a_1 *a* q.

U: Pomôžem ti. Mocniny dvojky a trojky z čitateľa a menovateľa si uprav na rovnaký exponent $n-1$. To, čo je umocnené na tento exponent, je kvocient. Zvyšok predstavuje hodnotu prvého člena.

Ž: *Takže:*

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{2^n}{5\cdot 3^{n-1}} = \frac{2\cdot 2^{n-1}}{5\cdot 3^{n-1}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Prvý člen geometrickej postupnosti je $a_1 = \frac{2}{5}$ *a kvocient je* $q = \frac{2}{3}$.

U: Áno. Po dosadení do vzorca pre súčet dostaneš:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5\cdot 3^{n-1}} = s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{5}.$$

U: Niekedy môžu byť úpravy predpisu pre n-tý člen na tvar $a_1 \cdot q^{n-1}$ komplikované. Vtedy použi postup, v ktorom po dosadení jednotky za n určíš a_1 a pomocou podielu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ dostaneš hodnotu kvocientu q.

Úloha :

Vypočítajte súčet nekonečných geometrických radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{5^{n+1}}$.

Výsledok*:*

a) $\frac{2}{3}$, *b)* $\frac{\sqrt{5}}{20}$.

Príklad 4: *Vypočítajte súčet nekonečného radu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{2n}}.$$

U: Ak má geometrická postupnosť prvý člen a_1 a kvocient q, tak vzorec pre jej n-tý člen je

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Nekonečný geometrický rad vytvorený z členov tejto postupnosti je potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ako dostaneme súčet konvergentného nekonečného geometrického radu?

Ž: *Ak $|q| < 1$, tak súčet s je*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: Rad v zadaní príkladu nie je geometrický. Vieme ho ale upraviť na súčet dvoch konvergentných nekonečných radov a pre ne potom použiť vzorec pre súčet.

Ž: *Ako to urobím?*

U: Výraz $\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{2n}}$ si rozdeľ na dva zlomky a každý z nich uprav na tvar $a_1 \cdot q^{n-1}$.

Ž: *Rozdelím, upravím:*

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^{2n}} = \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-(n-1)}} + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{4^n} = \cdots$$

U: Jednotlivé zlomky sa už trošku podobajú na vyjadrenie n-tého člena geometrickej postupnosti, ale ešte ich uprav tak, aby exponent mocnín bol $n-1$.

Ž: *Takže pokračujem v úpravách:*

$$\cdots = \frac{1}{2^2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{4 \cdot 4^{n-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

U: Výborne. Teraz využijeme pravidlo pre ***súčet nekonečných radov***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Ž: *To sa môže?*

U: Môže. Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{2n}}$ som si mohol rozdeliť na súčet dvoch nekonečných geometrických radov $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, pretože oba sú konvergentné. Ich súčty vypočítať vieme.

Ž: *Tak najprv ten modrý rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$*:*

$$a_1 = \frac{1}{4},\ q = \frac{1}{2},\ s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

A teraz ten druhý, červený rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$*:*

$$a_1 = \frac{1}{4},\ q = \frac{1}{4},\ s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

U: Správne. Môžeme teda vypočítať súčet celého radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{2n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Úloha :

Vypočítajte súčet nekonečného radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right).$$

Výsledok*:*

$s = 5.$

Príklad 5: *Zistite, pre aké hodnoty parametra $x \in \mathbb{R}$ sú dané nekonečné geometrické rady konvergentné a určte ich súčty:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n-1}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log^n x$.

U: Akým vzorcom je vyjadrený n-tý člen geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Ž: *Ak má geometrická postupnosť prvý člen a_1 a kvocient q, tak vzorec pre jej n-tý člen je*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: Správne. Nekonečný geometrický rad vytvorený z členov tejto postupnosti je potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}.$$

A ako dostaneme súčet konvergentného nekonečného geometrického radu?

Ž: *Vzorec pre súčet radu je:*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: Pre nás je dôležité, že geometrický rad konverguje a má takýto súčet, ak $|q| < 1$.

Ž: **a)** *Nekonečný geoemtrický rad je daný vzorcom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n-1}$. Z tohto predpisu vidím, že prvý člen $a_1 = 1$ a kvocient $q = x - 2$. Aby rad konvergoval, musím pre kvocient zaručiť podmienku*

$$|q| < 1, \quad \textit{teda} \quad |x-2| < 1.$$

Mám riešiť nerovnicu s absolútnou hodnotou?

U: Môžeš. Potrebuješ k tomu určiť, kedy je výraz v absolútnej hodnote kladný, kedy záporný, pohrať sa s prienikmi a zjednoteniami intervalov… Ponúknem ti rýchlejšie riešenie.

Ž: *To uvítam.*

U: Zápis $|q| < 1$ sa dá inak napísať aj takto: $q \in (-1; +1)$ alebo takto: $-1 < q < +1$.

Ž: *Ten posledný zápis sa mi páči. Využijem ho. Dosadím si za q dosadím výraz $x - 2$ a pripočítaním dvojky osamostatním parameter x:*

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 < x - 2 < +1 \quad / + 2 \\ \quad 1 < \quad x \quad < 3 \end{array}}$$

U: Správne. Máme hotovú podmienku pre parameter x. A teraz ešte súčet radu.

Ž: *Hneď to bude:*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}.$$

Rad je konvergentný, ak parameter $x \in (1;3)$. Súčet radu je $s = \dfrac{1}{3-x}$.

Ž: **b)** *Rad je daný vzorcom* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log^n x$. *Zapíšem to takto:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^n x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log x \cdot \log^{n-1} x\right).$$

Odtiaľ vidím, že prvý člen $a_1 = \log x$ *a aj kvocient* $q = \log x$. *Podmienka pre kvocient je:*

$$-1 < q < +1, \quad \textit{teda} \quad -1 < \log x < +1$$

U: Zapíš si aj čísla -1 a $+1$ ako logaritmy čísel.

Ž: *Dostanem:*

$$\log \frac{1}{10} < \log x < \log 10$$

U: Dobre. Logaritmická funkcia je rastúca, takže rovnaká nerovnosť platí aj pre argumenty:

$$\frac{1}{10} < x < 10.$$

Logaritmovať môžeme len čísla kladné, ale táto podmienka splnená je.

Ž: *Takže môžem vypočítať súčet radu:*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\log x}{1 - \log x}.$$

Rad je konvergentný, ak parameter $x \in \left(\dfrac{1}{10}; 10\right)$. Súčet radu je $s = \dfrac{\log x}{1-\log x}$.

Úloha : *Zistite, pre aké hodnoty parametra $x \in \mathbb{R}$ sú dané nekonečné geometrické rady konvergentné a určte ich súčty:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (4-x)^n$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{3x}\right)^{n-1}$, *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1-x}\right)^{n-1}$.

Výsledok:

a) $s = \dfrac{4-x}{x-3}$ *pre* $|x-4| < 1$, *t. j.* $x \in (3;5)$.

b) $s = \dfrac{3x}{3x+2}$ *pre* $|x| > \dfrac{2}{3}$, *t. j.* $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

c) $s = \dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x}$ *pre* $0 \leqq 1-x < 1$, *t. j.* $x \in (0;1\rangle$.

Príklad 6: *Vyriešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n = 1$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \log x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$.

Ž: *Mám riešiť rovnicu, ale tá obsahuje nekonečný geometrický rad.*

U: Musíš ho nahradiť jeho súčtom. Ako vyzerá predpis pre nekonečný geometrický rad?

Ž: *Ak má geometrická postupnosť prvý člen a_1 a kvocient q, tak nekonečný geometrický rad vytvorený z tejto postupnosti je:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: Kedy tento rad konverguje a aký je potom jeho súčet?

Ž: *Rad konverguje ak $|q| < 1$ a jeho súčet s určíme pomocou vzorca:*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

U: Teraz už môžeme prejsť na riešenie rovníc.

Ž: **a)** *V rovnici $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n = 1$ si najprv poriešim ľavú stranu. Rad si upravím:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (x-2) \cdot (x-2)^{n-1}.$$

Teraz vidím, že prvý člen $a_1 = x-2$ a aj kvocient $q = x-2$.

U: Kedy je rad konvergentný?

Ž: *Musí platiť, že $|q| < 1$, ale to sa dá zapísať aj takto: $-1 < q < +1$. Dosadím si za q výraz $x-2$ a pripočítaním dvojky osamostatním parameter x:*

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 < x-2 < +1 \quad / +2 \\ \ \ \ 1 < \ \ x \ \ < 3 \end{array}}$$

U: Správne. Ak $x \in (1;3)$, tak je rad konvergentný. Vypočítaj jeho súčet.

Ž:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x-2}{1-(x-2)} = \frac{x-2}{3-x}.$$

U: Ľavú stranu rovnice si teraz môžeš nahradiť súčtom radu.

Ž: *Súčet dosadím, zlomok odstránim, neznáme osamostatním na jednej strane a rovnica bude vyriešená:*

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = 1\\ \frac{x-2}{3-x} = 1 \ / \cdot (3-x)\\ x-2 = 3-x \ / + x + 2\\ 2x = 5\\ x = \frac{5}{2}\end{gathered}}$$

U: Číslo $\frac{5}{2} \in (1;3)$, takže je riešením rovnice.

Ž: **b)** *V rovnici* $\sum_{n=1}^{\infty} \log x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$ *si tiež najprv nahradím rad na ľavej strane jeho súčtom. Prvý člen* $a_1 = \log x$ *a kvocient* $q = -\frac{1}{2}$.

U: Hodnota kvocientu je z intervalu $(-1;+1)$, takže rad je konvergentný. Ale skôr než vypočítaš jeho súčet, povedz mi, pre aké x má výraz $\log x$ zmysel?

Ž: *Logaritmovať môžeme kladné čísla, takže podmienka pre* x *je* $x > 0$. *A teraz súčet radu.*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\log x}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log x}{\frac{3}{2}} = \frac{2\log x}{3}.$$

U: Dobre. Ľavú stranu rovnice môžeš nahradiť týmto súčtom.

Ž: *Ak si dosadím súčet, dostanem jednoduchú logaritmickú rovnicu. Jej riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} \log x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\\ \frac{2\cdot\log x}{3} = 2 \ / \cdot \frac{3}{2}\\ \log x = 3\\ x = 10^3\\ x = 1000\end{gathered}}$$

U: Výborne. Číslo 1000 vyhovuje aj podmienke, $1000 > 0$, takže je riešením rovnice.

Úloha : *Vyriešte rovnicu s neznámou* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{n-1} = \frac{4}{x-4}.$$

Výsledok*:* $a_1 = 1$*,* $q = \dfrac{3}{x}$*, rad je konvergentný pre* $|x| > 3$*,* $s = \dfrac{x}{x-3}$*.*

Po úprave vznikne kvadratická rovnica $x^2 - 8x + 12 = 0$*, jej riešením je číslo* $x = 6$*.*
(Koreň $x = 2$ *nevyhovuje podmienke* $|x| > 3$*.)*

Príklad 7: *Zapíšte v tvare zlomku s celočíselným čitateľom aj menovateľom čísla dané periodickým rozvojom :*

a) $0,\overline{28}$,

b) $-1,3\overline{45}$.

U: Každé racionálne číslo, ktoré je dané periodickým desatinným rovojom, sa dá zapísať v tvare zlomku s celočíselným čitateľom aj menovateľom.

Ž: *Ale ako to mám urobiť?*

U: Číslo si zapíš pomocou nekonečného geometrického radu a vypočítaj jeho súčet.

Ž: *Ako si mám číslo napísať ako rad?*

U: ***a)*** Takto:

$$0,\overline{28} = 0,28282828\dots = \frac{28}{100} + \frac{28}{10\,000} + \frac{28}{1000\,000} + \frac{28}{100\,000\,000} + \dots + \frac{28}{100^n} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{28}{100^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{28}{100} \cdot \frac{1}{100^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{28}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}.$$

Ž: *Aha. Ďalej už budem vedieť pokračovať. Rad je vytvorený z členov geometrickej postupnosti, ktorej prvý člen* $a_1 = \frac{28}{100}$ *a kvocient je* $q = \frac{1}{100}$. *Vypočítam jeho súčet:*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{28}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{28}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{28}{99}.$$

U: ***Číslo*** $0,\overline{28} = \frac{28}{99}$***.***

U: ***b)*** Číslo $0,\overline{28}$ z predchádzajúceho príkladu sa nazýva aj číslo s rýdzo periodickým rozvojom s periódou 28. Číslo $-1,3\overline{45}$ má nerýdzo periodický rozvoj, pretože okrem periódy 45 má aj predperiódu 3.

Ž: *Zmení sa nejak spôsob, akým vytvorím zlomok?*

U: Nie. Len nesmieš zabudnúť na to, že číslo má aj celú časť, predperiódu a záporné znamienko.

Ž: *Takže to skúsim rozpísať:*

$$-1,3\overline{45} = -1,3454545\dots = -\left(\frac{13}{10} + \frac{45}{1000} + \frac{45}{100\,000} + \frac{45}{10\,000\,000} + \dots + \frac{45}{10^{2n+1}} + \dots\right)$$

U: Dobre. Vieš určiť prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, z ktorej modrý nekonečný rad vznikol?

Ž: *To nie je ťažké. Prvý člen* $a_1 = \frac{45}{1000}$ *a kvocient je* $q = \frac{1}{100}$. *Môžem vypočítať súčet modrého radu:*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{45}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{45}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{45}{990}.$$

U: Správne. Periodický rozvoj čísla máš už teda vyjadrený ako zlomok. Pokračuj.

Ž: *K zlomku* $\frac{45}{990}$*, ktorý predstavuje zápis periodickej časti čísla* $-1,3\overline{45}$ *musím ešte pridať to, čo nepatrilo k perióde:*

$$-1,3\overline{45} = -\left(\frac{13}{10} + s\right) = -\left(\frac{13}{10} + \frac{45}{990}\right) = -\frac{1332}{990} = -\frac{74}{55}.$$

U: ***Číslo*** $-1,3\overline{45} = -\frac{74}{55}$***.***

Úloha :

Racionálne čísla dané periodickým rozvojom
a) $0,\overline{8}$, *b)* $-0,4\overline{5}$, *c)* $0,\overline{428\,571}$, *d)* $-6,0\overline{3}$
vyjadrite v tvare zlomku s celočíselnými čitateľmi a menovateľmi.

Výsledok*:*

a) $\frac{8}{9}$, *b)* $-\frac{41}{90}$, *c)* $\frac{428\,571}{999\,999} = \frac{3}{7}$, *d)* $-\frac{199}{33}$.

Príklad 8: *Do rovnostranného trojuholníka so stranou* 10 *cm je vpísaný rovnostranný trojuholník, ktorého strany sú stredné priečky pôvodného trojuholníka. Do tohto trojuholníka je tým istým spôsobom vpísaný rovnostranný trojuhlník a do neho ďalší atď až do nekonečna. Aký je súčet obvodov a obsahov takto zostrojených trojuholníkov?*

Ž: *Obvod prvého, najväčšieho trojuholníka by som vypočítať vedel. Obvod je* 30 *cm, lebo je to rovnostranný trojholník.*

U: A čo obvod druhého trojuholníka?

Ž: *Druhý trojuholník je priečkový, takže každá jeho strana má dĺžku rovnú polovici dĺžky strany pôvodného trojuholníka. Jeho obvod bude teda* 15 *cm.*

U: Vieš vypočítať aj obvody ďalších trojuholníkov?

Ž: *Obvod každého ďalšieho trojuholníka bude polovicou obvodu predchádzajúceho trojuholníka. Ale aký bude súčet obvodov všetkých týchto trojuholníkov?*

U: Aby sme mohli na túto otázku zodpovedať, musíme si najskôr zapísať postupnosť obvodov týchto trojuholníkov.

Ž: *To zvládnem:*

$$30,\ 15,\ \frac{15}{2},\ \frac{15}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{15}{32},\ \frac{15}{64},\ \frac{15}{128},\ \dots$$

U: Keď všetky členy tejto postupnosti sčítame, utvoríme tento nekonečný rad:

$$30+15+\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\frac{15}{64}+\frac{15}{128}+\dots,$$

ktorý ďalej upravíme

$$45+15\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots\right).$$

Ž: *Súčet nekonečného radu v zátvorke je* 1*.*

U: Prečo?

Ž: *Pretože ide o nekonečný geometrický rad s kvocientom* $q=\frac{1}{2}$ *a prvým členom* $a_1=\frac{1}{2}$*. Jeho súčet určíme vzorcom:*

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$$

U: Výborne. Pokračuj.

Ž: *Môžem teda dopočítať súčet obvodov:*

$$45+15\cdot s=45+15\cdot 1=60.$$

Súčet obvodov nekonečného počtu takto zostrojených trojuholníkov je 60 cm.

U: Dobre. Ak navzájom si odpovedajúce strany nejakých podobných útvarov tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom q, tak obvody týchto útvarov tvoria tiež geometrickú postupnosť s tým istým kvocientom.

Ž: *Uhm. A ako je to s obsahmi alebo s objemami?*

U: Obsahy rovinných útvarov alebo povrchy priestorových telies tiež tvoria geometrickú postupnosť, ale s kvocientom q^2.

Ž: *Rozumiem, veď ak chcem vypočítať obsah, musím násobiť strany medzi sebou.*

U: Nie sú to vždy strany. Ale v podstate správne - násobia sa dva rozmery daného útvaru. A iste už tušíš, ako to nakoniec bude s objemami.

Ž: *Ak odpovedajúce si hrany podobných telies sú členmi geometrickej postupnosti s kvocientom q, tak objemy týchto telies tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom q^3.*

U: Správne. Vypočítajme teda súčet obsahov nekonečného počtu do seba vpísaných trojuholníkov.

Ž: *Kvocient by sme už mali vyriešený. Je to $q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Potrebujem len prvý člen postupnosti obsahov trojuholníkov.*

U: To by nemalo byť ťažké. Pomocou Pytagorovej vety vypočítaš veľkosť výšky v rovnostranného trojuholníka so stranou $a = 10$ cm.

Ž:

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 100 - 25 = 75 \quad \Rightarrow \quad v = 5 \cdot \sqrt{3}.$$

Mám stranu aj výšku, vypočítam obsah S prvého trojuholníka:

$$S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{2} = 25 \cdot \sqrt{3}.$$

U: Dobre. Vzorec pre súčet nekonečného geometrického radu s daným prvým členom a kvocientom poznáš.

Ž: *Súčet je:*

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{100 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Súčet obsahov nekonečného počtu týchto trojuholníkov je $\frac{100 \cdot \sqrt{3}}{3}$ cm.

Úloha : *Do štvorca so stranou dĺžky a je vpísaný kruh, do neho štvorec, do toho opäť kruh atď. do nekonečna. Vypočítajte:*
a) súčet obvodov a súčet obsahov všetkých štvorcov,
b) súčet obvodov a súčet obsahov všetkých kruhov.

Výsledok:

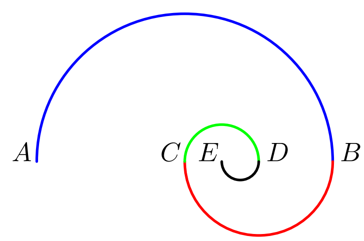
a) súčet obvodov štvorcov je $o_1 \cdot \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = 4a \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)$,

súčet obsahov štvorcov je $2S_1 = 2a^2$.

b) súčet obvodov kruhov je $o_1 \cdot \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = \pi a \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)$,

súčet obsahov kruhov je $2S_1 = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Príklad 9: *Určte dĺžku nekonečnej špirály, ktorá je zložená z nekonečne veľa polkružníc, pričom polomer prvej (najväčšej) polkružnice je r a polomer každej nasledujúcej polkružnice je polovicou polomeru predchádzajúcej polkružnice.*
Zistite vzdialenosť počiatočného a koncového bodu špirály.



U: Vymenuj mi členy postupnosti polomerov jednotlivých polkružníc, ktoré tvoria špirálu.

Ž: *Ak polomer najväčšej polkružnice je r a každý ďalší je polovicou predchádzajúceho, tak polomery sú:*

$$r,\ \frac{r}{2},\ \frac{r}{4},\ \frac{r}{8},\ \frac{r}{16},\ \ldots$$

U: Obvod kružnice s polomerom r, sa počíta podľa vzorca

$$o = 2\pi r,$$

ale špirálu tvoria len polkružnice. Zapíš mi teraz postupnosť dĺžok jednotlivých polkružníc, ktoré tvoria špirálu.

Ž: *Takže namiesto násobku 2π potrebujem len násobok π. Tak dostanem obvod polkružnice. Dĺžky polkružníc sú teda:*

$$\pi r,\ \pi\cdot\frac{r}{2},\ \pi\cdot\frac{r}{4},\ \pi\cdot\frac{r}{8},\ \pi\cdot\frac{r}{16},\ \ldots$$

U: Akú postupnosť si dostal?

Ž: *No, zdá sa, že ide o geometrickú postupnosť s prvým členom $a_1 = \pi r$ a kvocientom $q = \frac{1}{2}$.*

U: Správne. Dĺžku celej špirály dostaneš ako súčet dĺžok jednotlivých polkružníc.

Ž: *Ale tých polkružníc je nekonečne veľa.*

U: Áno, nekonečný súčet členov geometrickej postupnosti vytvára nekonečný geometrický rad. Jeho súčet je dĺžka špirály.

Ž: *Pre kvocient z intervalu $(-1,+1)$ je rad konvergentný a jeho súčet je*

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Môžem do tohto vzorca dosadiť hodnotu prvého člena a kvocientu a dostanem:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\pi r}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi r}{\frac{1}{2}} = 2\pi r.$$

To je pekné. Dĺžka nekonečnej špirály je taká istá ako dĺžka kružnice.

U: Máš pravdu. ***Dĺžka nekonečnej špirály je v tomto prípade $2\pi r$.***

Ž: *Ešte mám vypočítať vzdialenosť počiatočného a koncového bodu špirály. Dĺžku úsečky AX. To sa dá? Veď nekonečná špirála nemá žiadny koncový bod X.*

U: Pred chvíľou si vypočítal dĺžku nekonečnej špirály. Toto vypočítaš presne tak isto.

Ž: *Tak teda dobre. Najprv prejdem vzdialenosť AB. Špirála sa ale zatáča späť, takže sa vrátim po úsečke BC do bodu C. Odtiaľ sa vydám po úsečke CD do bodu D. ... Takto sa budem pohybovať po úsečkách raz doprava a raz doľava. Až do nekonečna.*

U: Prečo si si zvolil takýto cik-cak pohyb?

Ž: *Pretože veľkosť všetkých tých prejdených úsečiek poznám. Sú to priemery polkružníc, ktoré tvoria špirálu.*

U: Správne. Vypíš si členy postupnosti priemerov.

Ž:

$$2r,\ r,\ \frac{r}{2},\ \frac{r}{4},\ \frac{r}{8},\ \frac{r}{16},\ \dots$$

Aj priemery tvoria geometrickú postupnosť.

U: Ako teda vypočítaš veľkosť úsečky AX, teda vzdialenosť prvého a posledného bodu špirály?

Ž: *Pri pohybe zľava doprava budem veľkosť prejdenej úsečky pripočítavať a pri pohybe sprava doľava budem odpočítavať. Takže:*

$$|AX| = |AB| - |BC| + |CD| - |DE| + \dots$$

$$|AX| = 2r - r + \frac{r}{2} - \frac{r}{4} + \frac{r}{8} - \frac{r}{16} + \dots$$

U: Povedal si, že priemery tvoria geometrickú postupnosť. Jej prvý člen je $a_1 = 2r$ a kvocient je $q = -\frac{1}{2}$. Znamienko mínus zabezpečuje zmenu smeru pohybu. Vypočítaj súčet vzniknutého radu.

Ž:

$$|AX| = s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2r}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2r}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}r.$$

Vzdialenosť počiatočného a koncového bodu takejto nekonečnej špirály je $\frac{4}{3}r$.

Úloha : *Určte dĺžku krivky špirálového tvaru, ktorá je zložená z nekonečne veľa štvrťkružníc, pričom polomer prvej, najväčšej štvrťkružnice je r a polomer každej ďalšej sa rovná:*
a) polovici polomeru predchádzajúcej štvrťkružnice,
b) trom štvrtinám polomeru predchádzajúcej štvrťkružnice.

Výsledok:
a) $s = \pi r$,
b) $s = 2\pi r$.