Číselné množiny

Mgr. Jana Králiková

U: Čo si predstavuješ pod pojmom ***množina***?

Ž: *Skupinu nejakých vecí.*

U: Presnejšie by sa dalo povedať, že ***množina je skupina (súbor, súhrn) navzájom rôznych objektov***. Tieto objekty sa nazývajú ***prvky (elementy) množiny***.

Ž: *Máme sa zaoberať číselnými množinami, takže prvkami budú asi čísla.*

U: Presne tak. Pre dôležité číselné množiny používame takéto označenia:

- $\mathbb{N}$ ... množina všetkých prirodzených čísel,
- $\mathbb{Z}$ ... množina všetkých celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ ... množina všetkých racionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ ... množina všetkých reálnych čísel,
- $\mathbb{C}$ ... množina všetkých komplexných čísel.

Niekedy sa namiesto pojmu ***číselná množina*** stretneš s pojmom ***obor***.

U: Pojem čísla sa v histórii ľudstva postupne rozširoval a podobne sa postupuje aj v školskej matematike. Začneme prirodzenými číslami. Vieš k čomu sa používajú?

Ž: *No, prirodzené čísla označujú počet vecí.*

U: V matematike hovoríme, že ***prirodzené čísla vyjadrujú počet prvkov konečných neprázdnych množín***. Už vieš, že obor prirodzených čísel označujeme písmenom $\mathbb{N}$. Vymenuj mi niekoľko jeho prvkov.

Ž: *To je jednoduché:*

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \dots,\ 2008,\ 2009, \dots,\ 1\,000\,000, \dots\}.$$

U: Áno. Množina prirodzených čísel obsahuje číslo 1 a s každým číslom n obsahuje tiež číslo $n+1$. Aké počtové výkony s číslami poznáš?

Ž: *Viem čísla sčítať, odčítať, násobiť, deliť.*

U: A ak vezmeš dve ľubovoľné prirodzené čísla a a b, je aj ich súčet, rozdiel, súčin a podiel prirodzeným číslom?

Ž: *Súčet* $a+b$ *a súčin* $a \cdot b$ *je prirodzeným číslom vždy. Ale rozdiel* $a-b$ *a podiel* $a:b$ *je prirodzeným číslom len niekedy.*

U: Kedy?

Ž: *Rozdiel* $a-b$ *sa dá v množine* $\mathbb{N}$ *vypočítať len vtedy, ak* $a > b$. *A podiel* $a:b$ *len vtedy, ak číslo* a *je* **násobkom** *čísla* b.

U: Výborne. Hovoríme, že ***množina prirodzených čísel je uzavretá na sčítanie a násobenie***, ale ***nie je uzavretá na odčítanie a delenie***.

U: Ďalším základným matematickým pojmom je ***nula***. Na jej označenie používame symbol 0. Nula vyjadruje počet prvkov ***prázdnej množiny***.

Ž: *Dosť nezaujímavé číslo.*

U: Mýliš sa. Je to jeden z najdôležitejších matematických nástrojov. V starom indickom rukopise z roku 458 sa o nule píše toto: ***Ak nulu pripočítame alebo odpočítame, číslo sa nezmení, pri vynásobení nulou však všetko odrazu zmizne a dostaneme iba nulu.***

Ž: *Super! Veď to platí dodnes.*

U: Áno. A nesmieme zabudnúť na to, že ***delenie nulou nie je definované***. Preto vo výrazoch v tvare $a : b$ alebo $\frac{a}{b}$, kde písmená a, b označujú čísla, musíme vždy uviesť podmienku $b \neq 0$. Pomocou nuly môžeme zaviesť ďalšiu číselnú množinu: celé čísla.

Ž: *To je ľahké. Celé čísla sú tie, ktoré nemajú desatinnú časť.*

U: To je pravda, ale k tomu ešte len prídeme. ***Celé čísla vyjadrujú zmeny počtu prvkov, ich prírastok alebo úbytok.*** Vymenuj mi niekoľko prvkov tejto množiny.

Ž: *Dobre:*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \dots\}.$$

U: Množina celých čísel obsahuje teda všetky prirodzené čísla, nulu a pre každé prirodzené číslo n obsahuje aj číslo $0-n$.

Ž: *Výsledok tohto rozdielu je predsa* $-n$.

U: Áno. Číslo $-n$ sa nazýva ***opačné číslo*** k číslu n. Ale dôležité je to, že ***množina celých čísel je uzavretá nielen na sčítanie a násobenie, ale aj na odčítanie***.

Ž: *Výsledkom rozdielu dvoch celých čísel je teda vždy celé číslo. A ako je to s delením?*

U: Podiel dvoch celých čísel nemusí byť celé číslo. Množina celých čísel nie je uzavretá na delenie.

Ž: *Už mi je náš postup jasný. Takže teraz si asi zavedieme číselnú množinu, ktorá je uzavretá aj na delenie.*

U: Správna úvaha.

U: Ďalšou číselnou množinou je obor racionálnych čísel. Aké čísla tvoria túto množinu?

Ž: *Všetky tie, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku. Napríklad:*

$$\mathbb{Q} = \left\{-10;\ -4{,}2;\ -\frac{17}{20};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1\frac{3}{4};\ 15;\ 77{,}99; \dots\right\}.$$

U: Ale chýbajú ti tam čísla s periodickým desatinným rozvojom. Napríklad $0{,}\overline{3}$; $2{,}\overline{45}$ alebo $-1780{,}24\overline{6}$.

Ž: *Aha, naozaj. Aj tie sa dajú zapísať ako zlomok. Takže tiež patria medzi racionálne čísla.*

U: Správne. ***Racionálne čísla sa dajú zapísať v tvare zlomku, v ktorom čitateľ je celé číslo a menovateľ je prirodzené číslo.*** Symbolický zápis si pozri v rámčeku.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \right\}}$$

Racionálne čísla vyjadrujú počty celkov a ich častí a zmeny týchto počtov.

Ž: *A ak sčítam, odčítam, vynásobím alebo vydelím dve racionálne čísla, výsledok je opäť racionálne číslo.*

U: S jedinou výnimkou. Nulou nesmieš deliť. Inak je ***množina racionálnych čísel uzavretá na sčítanie, odčítanie, násobenie aj delenie***. Ale, keďže racionálne čísla sú tie, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku, možno by si si mohol zopakovať pravidlá pre ***počítanie so zlomkami***.

Ž: *Nemusím, zlomky mi nerobia problémy.*

U: Aha. Tak môžeme prejsť ďalej.

Ž: *A načo sú nám ďalšie číselné množiny? Veď sme došli po množinu, ktorá je uzavretá na všetky štyri počtové úkony – sčítanie, odčítanie, násobenie a aj na delenie s výnimkou delenia nulou.*

U: Pretože tých operácií s číslami je viac. Trošku to zhrniem. Majme rovnicu:

$$x + 5 = 2.$$

Táto rovnica nemá riešenie v množine $\mathbb{N}$.

Ž: *Máte pravdu. Výsledkom je číslo -3, a to nie je prirozené číslo.*

U: Preto boli zavedené celé čísla. V množine $\mathbb{Z}$ už táto rovnica riešenie má. V obore celých čísel ale nemá riešenie rovnica:

$$x \cdot 5 = 2.$$

Ž: *Lebo výsledkom delenia $2:5$ nie je celé číslo.*

U: Áno. A tak boli zavedené racionálne čísla. Lenže ako vyriešiš v množine $\mathbb{Q}$ rovnicu:

$$x^5 = 2?$$

Ž: *Nevyriešim. V množine $\mathbb{Q}$ táto rovnica nemá riešenie, lebo výsledok $\sqrt[5]{2}$ nie je racionálne číslo.*

U: Správne. Ukázala sa potreba rozšíriť obor racionálnych čísel o čísla, ktoré sa v tvare zlomku zapísať nedajú. Takéto čísla sa nazývajú ***iracionálne***. Množina iracionálnych čísel sa v rôznych matematických knihách označuje rôzne: $\mathbb{Q}'$, $\mathbb{Q}^*$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$...
A patria sem napríklad tieto čísla:

$$\mathbb{I} = \left\{ \sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt{5}, \ \sqrt[3]{2}, \ \sqrt[3]{3}, \dots, \ \pi, \ e, \ \log 2, \ \sin 45^\circ, \ \cos \frac{\pi}{6}, \dots \right\}.$$

Ž: *Iracionálne čísla majú nekonečný desatinný rozvoj, však?*

U: Nielen nekonečný, ale aj neperiodický. To je dôležité, lebo čísla s periodickým rozvojom sa zapísať v tvare zlomku dajú, sú teda racionálne.

Ž: *A ako je to s uzavretosťou množiny iracionálnych čísel na jednotlivé opercie?*

U: ***Množina iracionálnych čísel nie je uzavretá na žiadnu z operácií $+$, $-$, $\cdot$, $:$.***

Ž: *Prečo? Veď ak si vezmem napríklad $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, tak aj ich súčet, rozdiel, súčin aj podiel je znovu iracionálne číslo.*

U: ***Množina je uzavretá napríklad na operáciu sčítania vtedy, ak súčet ľubovoľných dvoch čísel tejto množiny patrí tiež do tejto množiny.*** Vezmi si napríklad iracionálne čísla $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$. Vyjadri ich súčet, súčin a podiel. Čo dostaneš?

Ž: *Súčet je 0, súčin je -2 a podiel je -1. Samé racionálne čísla.*

U: Iste by si už vedel ukázať, že aj rozdiel nejakých dvoch iracionálnych čísel nemusí byť iracionálnym číslom.

Ž: *Jasné. Mohol by som odčítať od seba dve rovnaké iracionálne čísla. Napríklad $\pi - \pi = 0$.*

U: A dostali sme sa až k množine reálnych čísel. Táto množina je zjednotením množiny racionálnych a množiny iracionálnych čísel. ***Reálne čísla vyjadrujú výsledky merania dĺžok, obsahov, objemov, fyzikálnych veličín a ich zmeny.***

Ž: *Patria sem teda všetky čísla, ktoré poznám.*

U: Ktoré zatiaľ poznáš. Vzťah medzi jednotlivými číselnými obormi je takýto:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Ž: *K množine $\mathbb{R}$ sme sa dostali postupným nabaľovaním iných čísel na čísla prirodzené.*

U: Áno. O reálnych číslach by si mal vedieť aj to, že každé reálne číslo sa dá na číselnej osi znázorniť práve jedným bodom a každý bod číselnej osi je obrazom práve jedného reálneho čísla.

Ž: *Znázorniť prirodzené alebo celé číslo mi nerobí problém. Ale ako znázorním niektoré racionálne alebo dokonca iracionálne čísla? Na pravítku nemám dielik s hodnotou $\frac{3}{7}$ alebo $\sqrt{2}$.*

U: Znázorňovanie takýchto čísel si ukážeme v inej časti matematiky. Racionálne čísla sa naučíš znázorňovať v téme ***rovnoľahlosť*** využitím podobných rovnoľahlých trojuholníkov a niektoré iracionálne v téme ***Pytagorova veta*** a ***Euklidove vety pre odvesny a výšku***.

U: V množine $\mathbb{R}$ sa trošku zdržíme. Povieme si o niektorých vlastnostiach reálnych čísel, ktoré platia aj pre prirodzené, celé, racionálne aj iracionálne čísla.

Ž: *A čo to bude?*

U: Začneme týmto: ak máme dve reálne čísla a a b, čo znamená zápis $a = b$?

Ž: *No predsa, že sa rovnajú.*

U: Áno. Zápis $a = b$ vyjadruje ***rovnosť*** čísel a a b. Rozumieme tým, že symboly a a b predstavujú dve vyjadrenia toho istého čísla.

Ž: *Jasné. Napríklad:* $\cos 0° = 1, \quad 1 + 1 = 2, \quad \frac{1}{2} = 0,5 \ \ldots$

U: Základné vlastnosti rovnosti ľubovoľných reálnych čísel a, b, c sú:

1. ***reflexívnosť rovnosti*** $\ldots \ a = a$,
2. ***symetria rovnosti*** $\ldots \ a = b \quad \Leftrightarrow \quad b = a$,
3. ***tranzitívnosť rovnosti*** $\ldots \ (a = b \quad \wedge \quad b = c) \quad \Rightarrow \quad a = c$.

Ž: *Netušil som, že niečo také jednoduché ako rovnosť dvoch čísel môže mať aj nejaké vlastnosti.*

U: A nielen to. Rovnosť môžeme aj upravovať. Pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c, $c \neq 0$, platí:

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c,$$

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c.$$

Ž: *Pripomína mi to* **ekvivalentné úpravy** *rovníc.*

U: Správne. Rovnica je predsa zápis rovnosti dvoch výrazov. Ale okrem vzťahu rovnosti sú v množine $\mathbb{R}$ zavedené aj vzťahy nerovnosti medzi reálnymi číslami.

Ž: *Viem. Zápis* $a < b$ *vyjadruje, že číslo* a **je menšie** *ako číslo* b.
A zápis $a > b$ *vyjadruje, že číslo* a **je väčšie** *ako číslo* b.

U: Pomocou vzťahov rovnosti a nerovnosti môžeme reálne čísla ***usporiadať***. Pre každé reálne čísla a, b totiž platí práve jeden zo vzťahov:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

Nazýva sa to ***trichotómia usporiadania***.

Ž: *Usporiadať znamená zoradiť. Viem, že zoraďovať môžeme:*

- **vzostupne**, *to znamená od najmenšieho čísla po najväčšie, alebo*
- **zostupne**, *teda od najväčšieho po najmenšie číslo.*

Uvedieme si nejaké vlastnosti aj pre **nerovnosť**?

U: Samozrejme. Pre každé reálne čísla a, b, c platí:

1. ***tranzitívnosť nerovnosti***:
$$(a < b \quad \wedge \quad b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c,$$
2. ***monotónnosť nerovnosti vzhľadom k pripočítaniu čísla***:
$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c,$$
3. ***monotónnosť nerovnosti vzhľadom k násobeniu kladným reálnym číslom***:
$$(a < b \quad \wedge \quad c > 0) \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.$$

Ž: *Tie posledné dve vlastnosti mi pripomínajú ekvivalentné úpravy nerovníc.*

U: Tieto vlastnosti sa naozaj využívajú pri riešení nerovníc.

U: Spomenul som pojem kladné číslo. Určite vieš, kedy sa reálne číslo $\boldsymbol{x}$ nazýva ***kladné***, ***záporné***, ***nezáporné***, ***nekladné***.

Ž: *Jasné. Číslo* $x \in \mathbb{R}$ *je:*

- *kladné, ak* $x > 0$,
- *záporné, ak* $x < 0$,
- *nezáporné, ak* $x \geqq 0$,
- *nekladné, ak* $x \leqq 0$.

U: Správne. Je užitočné zaviesť pomenovanie aj pre niektoré ďalšie číselné množiny, podmnožiny množiny $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{N}_0$ ... množina všetkých nezáporných celých čísel, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{Z}^-$ ... množina všetkých záporných celých čísel,
- $\mathbb{R}^+$ ... množina všetkých kladných reálnych čísel,
- $\mathbb{R}^-$ ... množina všetkých záporných reálnych čísel,
- $\mathbb{R}_0^+$ ... množina všetkých nezáporných reálnych čísel.

Ž: *Ešte poznám aj* **intervaly**. *Aj to sú podmnožiny množiny* $\mathbb{R}$.

U: Áno. ***Intervaly sú také podmnožiny množiny reálnych čísel, ktoré je možné graficky znázorniť na číselnej osi úsečkou, polpriamkou alebo priamkou. Krajné body úsečky a začiatočný bod polpriamky k nej môžu, ale nemusia patriť.*** Aké intervaly poznáš?

Ž: *Otvorené, uzavreté a polouzavreté (môžeme im hovoriť aj polootvorené). Viem, že otvorené sa značia pomocou okrúhlych zátvoriek* $(\dots)$ *a uzavreté pomocou takých špicatých zátvoriek* $\langle ... \rangle$.

U: Tá špicatá zátvorka sa volá uhlová.

Ž: *Aha. Polouzavreté (polootvorené) intervaly majú teda v zápise jednu zátvorku okrúhlu a druhú uhlovú.*

U: Chce to presnejšie rozdelenie: intervaly sa delia na ***ohraničené*** a ***neohraničené***.

Ž: **Ohraničený interval** *je asi taký, ktorý* **sa dá na číselnej osi znázorniť úsečkou**.

U: Áno. Nech je to úsečka s krajnými bodmi a, b, pričom $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Podľa toho, či krajné body úsečky patria alebo nepatria tejto úsečke, môžeme ich rozdeliť tak, ako si už uviedol:

- uzavretý interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x \leqq b\}$,
- otvorený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- polootvorený (polouzavretý) interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x < b\}$,
  $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqq b\}$.

Ž: **Neohraničený interval** *je potom asi taký, ktorý* **sa dá na číselnej osi znázorniť polpriamkou alebo priamkou***.*

U: Správne. Rozdeľujeme ich na:

- interval neohraničený sprava $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqq a\}$,
  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
- interval neohraničený zľava $(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x \leqq a\}$,
  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
- interval obojstranne neohraničený $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Ž: *Aha, tie prvé štyri sú znázornené polpriamkou a ten posledný priamkou.*

U: Je to tak. Pretože intervaly sú ***množiny***, môžeme určovať ich ***zjednotenie***, ***prienik***, ***rozdiel***... Možno by si mal zopakovať tieto operácie.

Ž: *Pozriem sa na to.*

U: Už sme si hovorili o počtových výkonoch s číslami. Nazývajú sa aj ***matematické operácie***. Základnými operáciami sú sčítanie a násobenie. Pre ľubovoľné čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:

1. ***komutatívnosť sčítania*** ... $a + b = b + a$,
2. ***komutatívnosť násobenia*** ... $a \cdot b = b \cdot a$,
3. ***asociatívnosť sčítania*** ... $a + (b + c) = (a + b) + c$,
4. ***asociatívnosť násobenia*** ... $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
5. ***distributívnosť násobenia vzhľadom k sčítaniu*** ... $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ž: *Komutatívny zákon poznám. Hovorí sa v ňom, že súčet dvoch ľubovoľných čísel sa nezmení, ak zamením poradie sčítancov. A asociatívny zákon hovorí, že sčítance môžem ľubovoľne poskupinkovať, pozátvorkovať a výsledok sa nezmení. A rovnako to platí pre súčin. Ale čo odčítanie a delenie?*

U: Tieto operácie nazývame ***inverzné*** (obrátené) k základným. Odčítanie a delenie nie je komutatívne ani asociatívne.

Ž: *Uhm. Veď vlastne viem, že* $2 - 5$ *sa nerovná* $5 - 2$*, ani* $2 : 5$ *nie je to isté ako* $5 : 2$.

U: No vidíš. Pripomeniem ešte existenciu dvoch dôležitých reálnych čísel.

Ž: *Som zvedavý, ktoré to sú.*

U: Dobre ich poznáš. Sú to 0 a 1. ***Číslo*** 0 ***je neutrálny prvok pre sčítanie***, pretože pre každé reálne číslo a platí:

$$a + 0 = a.$$

Ž: *Aha. Nula neovplyvní súčet. Jednotka zasa neovplyvní súčin.*

U: Áno. ***Číslo*** 1 ***je neutrálny prvok pre násobenie***, pretože pre každé reálne číslo a platí:

$$a \cdot 1 = a.$$

Okrem neutrálnych prvkov existujú v množine reálnych čísel aj prvky inverzné: ku každému reálnemu číslu a existuje práve jedno reálne číslo $-a$ také, že

$$a + (-a) = 0.$$

Ž: **Číslo** $-a$ **je číslo opačné k číslu** a.

U: Správne. Podobne: ku každému reálnemu číslu $a \neq 0$ existuje práve jedno reálne číslo $\frac{1}{a}$ také, že

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Ž: *A* **číslo** $\frac{1}{a}$ **sa nazýva číslo prevrátené k číslu** a.

U: Výborne. To boli najzákladnejšie poznatky o reálnych číslach. A teraz skús vyriešiť v obore reálnych čísel rovnicu:

$$x^2 = -5.$$

Ž: *Hops. To sa predsa nedá. Druhá mocnina žiadneho čísla nedáva výsledok* -5*. Rovnica nemá riešenie.*

U: Máš pravdu. Táto rovnica nemá v obore $\mathbb{R}$ riešenie. Preto bola zavedená ďalšia číselná množina, ktorá obsahuje aj odmocniny zo záporných čísel. Je to ***obor komplexných čísel***. Množina reálnych čísel je podmnožinou množiny komplexných čísel:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

O ***komplexných číslach*** sa ale porozprávame inokedy.

U: Mimochodom, vieš aký je rozdiel medzi pojmami ***číslo*** a ***číslica***?

Ž: *Číslica je jednociferné číslo.*

U: To je pravda, ale skúsme zaviesť najprv pojem číslica a pomocou neho pojem číslo.

Ž: *Tak dobre. Číslica je znak, symbol. A číslo je skupina takých symbolov. Alebo by som mohol povedať, že číslica je písmeno a číslo je slovo vytvorené z číslic.*

U: To už je lepšie. V slovenčine sa spolu s pojmom číslica používa aj slovo cifra.

Ž: *Viem. Nevravíme dvojčíslicové číslo, ale dvojciferné.*

U: Slovo cifra vzniklo z anglického slova CIPHER, čo znamená číslica, symbol, znak, kód. Rovnakého pôvodu je aj naše slovo šifra.

Ž: *Zaujímavé. Nikdy predtým som si neuvedomil spojitosť medzi pojmami cifra a šifra.*

U: A vedel by si pomocou číslic zapísať číslo v rozvinutom tvare?

Ž: *To je ľahké.* **Rozvinutý tvar čísla je zápis, v ktorom rozpíšem, koľko má číslo jednotiek, desiatok, stovák, tisícok. . .**

U: Ukáž mi to napríklad pre číslo 275.

Ž: *Tak teda:*

$$275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

U: Vidím, že si predpokladal, že číslo 275 je dané v desiatkovej číselnej sústave.

Ž: *A nie je?*

U: Ak sa nepovie o akú sústavu ide, tak naozaj predpokladáme, že pracujeme v desiatkovej číselnej sústave. Ale ako by rozvinutý tvar čísla 275 vyzeral napríklad v osmičkovej sústave?

Ž: *No, myslím, že namiesto mocnín desiatky by som použil mocniny osmičky. Takto:*

$$275_8 = 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0.$$

U: Správne. A dostali sme sa až k pojmu ***číselná sústava***. Každá číselná sústava pracuje s určitou sadou znakov - číslic. ***Desiatková sústava*** pracuje s desiatimi číslicami. Sú to číslice 0, 1, 2, 3, . . . , 9.

Ž: *Viem.* **Dvojková sústava** *má len dve číslice:* 0 *a* 1. **Trojková** *zasa tri:* 0, 1 *a* 2. *Ale ako je to v dvanástkovej alebo šestnástkovej sústave?*

U: No tak tie používajú 12 alebo 16 číslic.

Ž: *Ale veď číslic je len* 10.

U: Sústavy, ktoré používajú viac číslic ako 10, si pomáhajú aj písmenami. ***Šestnástková sústava*** pracuje s desiatimi číslicami 0 až 9 a so šiestimi písmenami A, B, C, D, E a F. Spolu je to 16 rôznych znakov.

Ž: *Aha.*

U: Mimochodom, všetky spomínané číselné sústavy sú pozičné.

Ž: *Čo to znamená?*

U: ***Pozičná číselná sústava je systém na vyjadrenie čísel pomocou číslic, v ktorom hodnota číslice závisí od miesta (pozície), na ktorom je v čísle napísaná.***

Ž: *Je mi jasné, že nie je jedno na akej pozícii je číslica v čísle umiestnená. V čísle* 753 *mám päť desiatok, ale v čísle* 4589 *predstavuje číslica* 5 *počet stoviek.*

U: No vidíš. Jednotlivým pozíciám sa hovorí aj ***rády***. V desiatkovej číselnej sústave máme rád jednotiek, rád desiatok, rád stoviek . . .

Ž: *Za desatinnou čiarkou je potom rád desatín, stotín, tisícin. . .*

U: Áno. Ide o celočíselné mocniny čísla 10, ktoré je základom desiatkovej sústavy. To, ako sa prevádzajú čísla z jednej pozičnej sústavy do druhej, si ukážeme v riešených príkladoch.

Ž: *A sú aj iné číselné sústavy ako pozičné?*

U: Sú. A myslím, že jednu určite poznáš.

Ž: *Teraz si akosi neviem spomenúť.*

U: A čo tak rímske číslice?

Ž: *Tak tie poznám.*

U: Rímske číslice vznikli asi v 5. storočí p.n.l. ale treba povedať, že už v 10. storočí nášho letopočtu boli zastaralé.

Ž: *Načo sa teda nimi zaoberať?*

U: Pretože sa dodnes používajú a patrí k všeobecnej inteligencii poznať ich. Zopakujme si, aké rímske číslice poznáme.

Ž: *Sú to vlastne písmená:*

$$I = 1,\ V = 5,\ X = 10,\ L = 50,\ C = 100,\ D = 500,\ M = 1000.$$

Pomáham si vetou:

I*van* **V***iedol* **X***éniu* **L***esnou* **C***estou* **D***o* **M***esta.*

U: Dobre. Starí Rímania počítali pomocou prstov, takže symboly I, II, III predstavovali počet zdvihnutých prstov. Ak vystrieš všetky prsty, tak tvar medzi roztiahnutým palcom a ukazovákom na ruke sa podobá véčku. Preto symbol V pre päť prstov.

Ž: *Naozaj sa to podobá na véčko. A čo ostatné písmenká?*

U: Desať prstov, teda dve véčka vytvoria písmenko X. Symbol C je prvé písmeno latinského slova CENTUM, čo znamená sto. A symbol M je začiatok slova MILLE, čo je tisíc.

Ž: *A ako prišli na L a D?*

U: Vodorovným rozdelením písmenka C dostali tvar podobný písmenu L. Polovica zo sto je teda L. Zvislým rozdelením písmena M vznikol tvar, ktorý sa podobal na neúplné D. Polovica z tisíc je teda D.

Ž: *Zaujímavé. Zapamätám si to.*

U: Rímske číslice netvoria pozičnú sústavu, ale tvorenie čísel pomocou nich má svoje osobitné pravidlá. V riešených príkladoch si precvičíme aj zápis čísla pomocou rímskych číslic.

Príklad D: *Dokážte, že množina racionálnych čísel je uzavretá na súčet, rozdiel, súčin aj podiel, s výnimkou delenia nulou.*

U: Čo to znamená, že číselná množina je ***uzavretá*** na nejakú operáciu, napríklad na súčet?

Ž: *Že ak si vezmem ľubovoľné dve čísla z danej množiny a sčítam ich, tak výsledný súčet bude tiež číslom z tejto množiny.*

U: A konkrétne pre náš príklad?

Ž: *Teda, že ak si vezmem ľubovoľné dve* **racionálne čísla***, tak ich súčet bude tiež racionálne číslo.*

U: Ešte mi povedz aké číslo nazývame racionálne?

Ž: *Také, ktoré sa dá zapísať v tvare zlomku.*

U: Presnejšie povedané, ak sa dá zapísať v tvare zlomku s celočíselným čitateľom a prirodzeným menovateľom. Máš teda dokázať, že ak si vezmeš ľubovoľné dve čísla zapísané ako zlomok, tak aj ich súčet, rozdiel, súčin a podiel sa bude tiež dať zapísať ako zlomok.

Ž: *Dobre. Tak nech x a y sú ľubovoľné dve racionálne čísla.*

U: Musíš mať ich zápis v tvare zlomku. Nech napríklad $x = \frac{a}{b}$ a $y = \frac{c}{d}$, pričom $a, c \in \mathbb{Z}$ a $b, d \in \mathbb{N}$.

Ž: *Keďže menovatele sú prirodzené čísla, mám tým pádom zabezpečené, že sú nenulové.*

U: Áno. Vyjadri si teraz súčet zlomkov.

Ž: *Takže:*

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

U: Správne. Súčet dvoch zlomkov sa teda dá zapísať ako zlomok. Je ale jeho čitateľ celočíselný a menovateľ prirodzený?

Ž: *Myslím, že áno. V čitateli sa len násobia celé a prirodzené čísla a výsledky sa potom sčítajú. Súčet bude celým číslom. A v menovateli sa vynásobili dve prirodzené čísla, výsledok takéhoto súčinu je tiež prirodzené číslo.*

U: Výborne. Takže zlomok, ktorý si dostal má celočíselný čitateľ a prirodzený menovateľ. Patrí teda medzi racionálne čísla. Dokázal si uzavretosť množiny racionálnych čísel na sčítavanie. Rovnako skús ukázať, že to platí aj pre rozdiel, súčin aj podiel čísel x a y.

Ž: *Pre rozdiel platí:*

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d},$$

pre súčin:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

a pre podiel:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Len som využil pravidlá pre počítanie so zlomkami. Výsledky všetkých operácií sa dajú zapísať ako zlomok.

U: Uisti sa, že každý výsledný zlomok má v čitateli celé číslo a v menovateli prirodzené.

Ž: *Zlomky, ktoré som dostal ako výsledok rozdielu a súčinu dvoch racionálnych čísel sú v poriadku. Oba majú v menovateli súčin dvoch prirodzených čísel, čo je číslo prirodzené a v čitateľoch oboch z nich sú celé čísla. Ale ten posledný výsledok – tam si nie som istý.*

U: Tak sa naň pozrime. Vraveli sme si, že nulou sa deliť nesmie. Ak delíš zlomok $\frac{a}{b}$ zlomkom $\frac{c}{d}$ musíš predpokladať, že deliteľ je nenulový. Kedy je zlomok $\frac{c}{d}$ rôzny od nuly?

Ž: *Ak jeho čitateľ je nenulový.*

U: Správne. Musíme teda predpokladať, že $c \neq 0$. Vo výslednom zlomku $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ je v čitateli súčin $a \cdot d$, teda súčin celého a prirodzeného čísla. Výsledkom je celé číslo. Pozrime sa teraz na menovateľ.

Ž: *Tam je problém. V menovateli je súčin $b \cdot c$, teda prirodzené krát celé nenulové. Výsledok je určite nenulový, ale nemusí byť prirodzený.*

U: Ja v tom problém nevidím. Ak je menovateľ kladný, je to prirodzené číslo. To by bolo v poriadku. A ak je záporný, tak znamienko menovateľa môžem zapísať aj pred celý zlomok – na úroveň zlomkovej čiary, alebo ho môžem dať do čitateľa.

Ž: *Aha, takže vlastne si aj v menovateli viem vyrobiť prirodzené číslo. V tom prípade je množina racionálnych čísel uzavretá aj na operáciu delenia.*

U: Ale stále s výnimkou delenia nulou. Dokázal si teda, že súčet, rozdiel, súčin aj podiel ľubovoľných dvoch racionálnych čísel je opäť racionálnym číslom (okrem delenia nulou), teda množina racionálnych čísel je uzavretá na dané operácie.

Príklad 1: *Zapíšte čísla* 718 *a* $23\,056,409$ *v rozvinutom tvare.*

U: Čo je to ***rozvinutý tvar čísla***?

Ž: *To je zápis, v ktorom rozpíšem, koľko má číslo jednotiek, desiatok, stoviek, tisíciek, ...*

U: Áno. Teraz pracujeme v ***desiatkovej číselnej sústave*** a jednotky, desiatky, stovky... predstavujú celočíselné mocniny čísla 10, ktoré je základom tejto sústavy.

Ž: *Číslo* 718 *má sedem stoviek, jednu desiatku a osem jednotiek:*

$$718 = 700 + 10 + 8 = 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

U: To ešte nie je koniec. V rozvinutom tvare sa zvyknú písať namiesto čísel 100, 10, 1 mocniny desiatky. Teda:

$$1 = 10^0, \qquad 10 = 10^1, \qquad 100 = 10^2, \qquad 1000 = 10^3, \ldots$$

Ž: *Aha. Takže*

$$718 = 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

U: Dobre. Poďme na druhé číslo.

Ž: *Druhé číslo už nie je prirodzené. Má aj desatinnú časť.*

U: Ako sa nazývajú ***rády*** za desatinnou čiarkou?

Ž: *Hneď za čiarkou sú desatiny, potom stotiny, tisíciny, desaťtisíciny,...*

U: Opäť si ich napíšeme pomocou mocnín desiatky:

$$0,1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}, \qquad 0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}, \qquad 0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}.$$

Ž: *Takže môžem písať:*

$$23\,056,409 = 20\,000 + 3\,000 + 50 + 6 + 0,4 + 0,009 =$$

$$= 2 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,01 + 9 \cdot 0,001 =$$
$$= 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}.$$

U: Výborne. Mohol by si napísať aj takýto rozvinutý tvar:

$$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3}.$$

Vidíš, v čom sa líši tvoj a môj zápis?

Ž: *Vy ste nezapísali rád stoviek a rád stotín, pretože sa v čísle nevyskytujú. Sú tam nula krát.*

U: Správne. Takéto chýbajúce pozície v rozvinutom tvare môžu ale nemusia byť uvedené. V skrátenom zápise ale uvedené byť musia. A ak by si mal dané číslo v rozvinutom tvare, ako by si získal ten obvyklý skrátený zápis?

Ž: *Proste by som len vypočítal hodnotu číselného výrazu. Napríklad:*

$$3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-2} = 300 + 5 + 0,07 = 305,7.$$

U: Správne.

Úloha 1: *Zapíšte čísla* $2064,503$ *a* $183\,470,25$ *v rozvinutom tvare.*

Výsledok: $2064,503 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3}$,
$183\,470,25 = 1 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$.

Úloha 2: *Zapíšte v skrátenom tvare číslo* $5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-4}$.

Výsledok: $5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-4} = 52007,0608$.

Príklad 2: *Zapíšte číslo* 791 *v dvojkovej sústave.*

U: V dvojkovej (binárnej) sústave sú rádmi celočíselné mocniny čísla 2.

Ž: *Takže potrebujem* 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... , *ale aj* 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}... *?*

U: Áno. Najprv zisti, aká najväčšia mocnina dvojky sa do čísla 791 zmestí.

Ž: *Ako to mám zistiť?*

Ž: *Vypíš si zopár prvých mocnín dvojky, ktoré nie sú väčšie ako číslo* 791.

Ž: *Takže:*

$1 = 2^0,\ 2 = 2^1,\ 4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 16 = 2^4,\ 32 = 2^5,\ 64 = 2^6,\ 128 = 2^7,\ 256 = 2^8,\ 512 = 2^9.$

U: Správne. Do čísla 791 sa teda zmestí najviac deviata mocnina dvojky a ešte sa niečo zvýši. Pomocou tejto deviatej mocniny dvojky rozpíšeme číslo 791 na súčet 512+279. Teraz zisti, aká najväčšia mocnina dvojky sa zmestí do čísla 279.

Ž: *Vojde tam* 256 *a ešte zvýši* 23.

U: Dobre. A čo do čísla 23? Aká mocnina dvojky sa tam zmestí?

Ž: *To už sú malé čísla. Rovno napíšem, že* $23 = 16 + 7$ *a* $7 = 4 + 3$. *Uf. Ešte môžem napísať, že* $3 = 2 + 1$.

U: Dobre. Ja to zapíšem takto:

$$791 = 512 + 256 + 16 + 4 + 2 + 1 =$$

$$= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Ž: *A to je všetko?*

U: Nie. V desiatkovej sústave potrebuješ vedieť, koľko má číslo jednotiek, desiatok, stoviek, tisícok ... V dvojkovej sústave potrebuješ vedieť koľko akých mocnín dvojky má dané číslo. Takže:

$$791 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Počet jednotlivých rádov tvorí skrátený zápis čísla 791 v dvojkovej sústave.

Ž: *Ale to sú samé jednotky.*

U: V rozvinutom tvare, ktorý máš rozpísaný, nie je nutné uvádzať chýbajúce pozície. V skrátenom tvare ale uvedené byť musia. Pomôžem ti takýmto zápisom:

$$791 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Teda:

$$791_{10} = 1100010111_2.$$

Ž: *Dolné indexy pri číslach* 791 *a* 1100010111 *označujú v akej sústave je dané číslo?*

U: Áno. Ukážeme si aj iný postup prevodu čísla 791 do dvojkovej sústavy.

Ž: *Tento postup bol celkom ľahký, tak dúfam, že taký bude aj ten druhý.*

U: Ak rád delíš, tak si prídeš na svoje. Ak máš zapísať číslo ***do dvojkovej sústavy***, prichystaj sa na ***delenie dvojkou***. Číslo 791 vydelíš dvojkou. Aký môže byť zvyšok pri delení dvojkou?

Ž: **Pri delení dvojkou môže byť zvyšok len** 0 **alebo** 1. *Nič iné.*

U: A práve zvyšky pri postupnom delení vytvoria číslo 791 v dvojkovej sústave.

Ž: *Akosi tomu nerozumiem. Aké postupné delenie? Čo mám postupne deliť?*

U: Ukážeme si to. Najprv vydelíme číslo 791 číslom 2. Výsledok budeme potrebovať, zvyšok tiež:

$$791 : 2 = 395 \quad zv.\ 1.$$

Výsledok, ktorý sme dostali, teda číslo 395 budeme znova deliť dvojkou:

$$395 : 2 = 197 \quad zv.\ 1.$$

A znova. Výsledok, ktorý po vydelení dostaneme, znova vydelíme dvojkou. Zvyšky po delení si zapisuj nabok.

Ž: *Takže najprv budem deliť dvojkou číslo* 197*, potom výsledok tohto delenia, potom výsledok toho nasledujúceho delenia...*

$$197 : 2 = 98 \quad zv.\ 1$$

$$98 : 2 = 49 \quad zv.\ 0$$

$$49 : 2 = 24 \quad zv.\ 1$$

$$24 : 2 = 12 \quad zv.\ 0$$

$$12 : 2 = 6 \quad zv.\ 0$$

$$6 : 2 = 3 \quad zv.\ 0$$

$$3 : 2 = 1 \quad zv.\ 1$$

A dokedy mám vlastne deliť jednotlivé výsledky?

U: Dovtedy, kým nedostaneš výsledok nulu. To bude posledné delenie.

Ž: *V mojom prípade musím ešte urobiť:*

$$1 : 2 = 0 \quad zv.\ 1$$

U: Dobre. A teraz si všimni len zvyšky jednotlivých delení a zapíš ich v opačnom poradí, než si ich získaval.

Ž: *Takže zvyšky zapíšem od konca. Prvý zvyšok bude ten, ktorý mi vyšiel posledný:*

$$1100010111.$$

U: A to je vlastne číslo 791 zapísané v dvojkovej sústave.

Ž: *A prečo som tie zvyšky musel napísať od konca a nie tak, ako som ich postupným delením získaval?*

U: Zvyšok po prvom delení je dvojková číslica najnižšieho – nultého rádu. Musí preto ísť na koniec. Zvyšok po druhom delení je dvojková číslica prvého rádu. Bude stáť na predposlednom mieste. A tak ďalej... Pri poslednom delení získavaš dvojkovú číslicu najvyššieho rádu. Tá stojí na začiatku.

Ž: *Aha. Pri poslednom delení mám za sebou už všetky predchádzajúce delenia, delil som dvojkou toľkokrát, koľko sa dalo, takže vlastne zisťujem hodnotu na najvyššej pozícii.*

U: Áno.

> Ľudí môžeme rozdeliť do 10 skupín –
> – tých, ktorí rozumejú binárnej sústave a tých, ktorí jej nerozumejú.

Oba spôsoby, ktoré sme si ukázali môžeš využiť na prevod čísla aj do inej sústavy.

Ž: *Len použijem mocniny alebo budem deliť takým číslom, ako je základ novej sústavy?*

U: Presne tak.

Úloha 1: *Zapíšte číslo* 3 056 *v dvojkovej sústave.*
Výsledok: $3\,056_{10} = 101\,111\,110\,000_2$.

Úloha 2: *Zapíšte číslo* 12 520 *v trojkovej sústave.*
Výsledok: $12\,520_{10} = 122\,011\,201_3$.

Úloha 3: *Zapíšte číslo* 581 324 *v osmičkovej sústave.*
Výsledok: $581\,324_{10} = 2\,157\,314_8$.

Príklad 3: *Prirodzené číslo* $1\,100\,010_2$ *z dvojkovej sústavy a prirodzené číslo* $3A\,50E_{16}$ *zo šestnástkovej sústavy zapíšte v desiatkovej sústave.*

U: Sústavy, ktoré nás teraz zaujímajú, sa nazývajú ***pozičné sústavy***. Vieš prečo?

Ž: *Slovo pozícia znamená umiestnenie, takže asi záleží na pozíciách číslic.*

U: Presne tak. Tá istá číslica má na rôznej pozícii úplne iný význam. V čísle 3 243 znamená trojka na konci – tri jednotky.

Ž: *Ale trojka na začiatku znamená tri tisícky.*

U: V čísle $1\,100\,010_2$ máš jednotky a nuly. Aké pozície teraz obsadili jednotky?

Ž: *Číslo je sedemciferné, takže potrebujem nultú až šiestu mocninu. A keďže číslo je z dvojkovej sústavy, tak základ mocniny je dvojka. Prvá číslica* 1 *je pre rád* 2^6*, druhá číslica* 1 *je pre rád* 2^5 *a tretia číslica* 1 *je pre mocninu* 2^1.

U: Správne. Mohli by sme to zapísať takto:

$$1\,100\,010_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

A teraz to už len vyčísli.

Ž: *Takže:*

$$1\,100\,010_2 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 2 = 98_{10}.$$

U: Dobre. Prejdime teraz na číslo $3A\,50E_{16}$ v šestnástkovej sústave.

Ž: *To písmenkovo-číslicové číslo mi nie je jasné.*

U: Každá pozičná sústava používa toľko číslic, aký je základ jej mocniny. V dvojkovej sústave sú dve číslice: 0 a 1. V desiatkovej sústave je desať číslic: 0, 1, 2, ..., 9. V šestnástkovej sústave je 16 číslic. Ale číslic, ktoré používame, je len desať. Preto sa pridalo ďalších 6 znakov. Dohoda je, že sú to písmená A, B, C, D, E, F.

Ž: *Takže číslica* A *je tu za desiatku a* E *za štrnástku?*

U: Áno. Rozpíš si číslo $3A\,50E_{16}$ v rozvinutom tvare a vyčísli to.

Ž: *Dobre. Číslo je päťciferné, takže ide o nultú až štvrtú mocninu šestnástky:*

$$\begin{aligned} 3A\,50E_{16} &= 3 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = \\ &= 3 \cdot 65\,536 + 10 \cdot 4096 + 5 \cdot 256 + 0 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = \\ &= 196\,608 + 40\,960 + 1280 + 0 + 14 = 238\,862_{10}. \end{aligned}$$

U: Veľmi dobre.

Úloha : *Zapíšte v desiatkovej sústave čísla* $5F4_{16}$, 257_8, $210\,201_3$ *a* 110011_2.

Výsledok: $5F4_{16} = 1524_{10}$, $257_8 = 175_{10}$, $210\,201_3 = 586_{10}$, $110011_2 = 51_{10}$.

Príklad 4: *Vyjadrite pomocou rímskych číslic čísla:*

$$7, 11, 123, 1006,\ \ 4, 40, 400, 90,\ \ 450, 499, 999, 3468.$$

U: Zopakujme si najprv, aké rímske číslice poznáme.

Ž: *Tie číslice sú vlastne písmenká:*

$$I = 1,\ V = 5,\ X = 10,\ L = 50,\ C = 100,\ D = 500,\ M = 1000.$$

Pomáham si vetou:

I*van* **V***iedol* **X***éniu* **L***esnou* **C***estou* **D***o* **M***esta.*

U: Dobre. Rímske číslice netvoria pozičnú sústavu, ale tvorenie čísel pomocou nich má svoje osobitné pravidlá:

- ***Rímske čísla sú kombináciou rímskych číslic I, V, X, L, C, D, M.***
- ***Rímske čísla se skladajú písaním rímskych číslic od najvyšších hodnôt až k najnižším.***
- ***Ak po väčšej číslici nasleduje menšia alebo rovnaká, ich hodnoty sa sčítajú.***

Ž: *Číslo* 7 *zapíšem ako súčet najvyšej hodnoty* 5 *a dvoch jednotiek.*
Takže $7 = 5 + 1 + 1$, *po prepise to bude* **VII**.
Číslo $11 = 10 + 1$, *po prepise to bude* **XI**.
Číslo $123 = 100 + 20 + 3 = 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1$, *teda* **CXXIII**
a číslo 1006 *je jedna tisícka, jedna päťka a jedna jednotka, teda* **MVI**.

U: Správne. Ďalšie pravidlo hovorí, že:

- ***Za sebou môžu stáť maximálne 3 rovnaké symboly.***

Ž: *Hops. Čísla* $4, 40, 400$ *teda nemôžem zapísať ako IIII, XXXX, CCCC.*

U: Nie. Tieto čísla dostaneš odčítavaním od najbližšej vyššej hodnoty:

- ***Menšia rímská číslica umiestnená pred väčšou znamená odčítavanie.***
- ***Pre odčítavanie sa používajú len rímské číslice I, X, C.***

Ž: *To mi pomôže. Číslo* 4 *dostanem ak odpočítam* 1 *od* 5, *takže* **IV**. *Číslo* 40 *je bez desiatky päťdesiatka, teda* **XL** *a podobne* 400 *je bez stovky päťstovka, takže po prepise je to* **CD**.

U: Ako to bude s číslom 90?

Ž: *Nemôžem napísať* $50 + 10 + 10 + 10 + 10$, *lebo v čísle LXXXX by som mal štyri desiatky. Takže číslo* 90 *musím vyrobiť odčítaním desiatky od stovky. Po prepise to bude* **XC**.

U: Pri odčítavaní sa ešte trošku zdržíme:

- ***Číslicu I môžeme odčítavať len od číslic V a X.***
- ***Číslicu X môžeme odčítavať len od číslic L a C.***
- ***Číslicu C môžeme odčítavať len od číslic D a M.***

Iste si si všimol, že odčítavať môžeme len hodnoty 1, 10 a 100. Nemôžeme odčítať hodnotu 5 ani 50.

Ž: *Takže* 450 *nemôžem napísať ako bez päťdesiatky päťstovka, lebo číslicu L nemôžem odpočítavať. Nemôžem to napísať ani ako štyri stovky a k tomu päťdesiatka, lebo štyrikrát za sebou číslica C nemôže ísť. Uf. Ako to teda urobím?*

U: Najprv sa vyrieši počet stoviek. Štyri stovky to je bez stovky päťstovka, teda CD. A k tomu sa pridá päťdesiat. Dostaneme ***CDL***. Skús zapísať ďalšie čísla.

Ž: *Číslo* 499 *nemôžem zapísať ako bez jednej jednotky päťstovka, takže si najprv vyriešim počet stoviek. Tie sú štyri,* 400 *je CD. K tomu desiatky. Deväť desiatok môžem zapísať ako bez jednej desiatky stovka, teda XC. A nakoniec jednotky, tých je deväť, teda bez jednej jednotky desiatka, to je IX. Zapísané spolu je to* **CDXCIX**. *No teda. Riadna fuška.*

U: Ja len pripomeniem:

- ***Najprv sa vyrieši počet tisícok, potom počet stoviek, počet desiatok a nakoniec počet jednotiek.***

Ž: *Ďalšie číslo je* 999. *Stoviek je deväť, teda* 900 *je bez stovky tisícka: CM. Desiatok je deväť, číslo* 90 *je bez jednej desiatky stovka, takže: XC. A jednotiek je* 9*, to je IX. Číslo* 999 *je* **CMXCIX**.

U: Ostalo nám posledné číslo.

Ž: *Áno. Číslo* 3468*. Má tri tisícky, to je MMM. Potom má štyri stovky. To už viem zapísať ako bez stovky päťstovka, teda CD. Šesť desiatok to je päťdesiatka a k tomu ešte jedna desiatka, čiže LX. A osem jednotiek je päťka a tri jednotky, teda VIII. Dostanem* **MMMCDLXVIII**.

U: Výborne. Len pripomeniem niečo, čo si si možno všimol:

– ***Ak sa v čísle nevyskytujú číslice* 4 *alebo* 9 *je situácia jednoduchá. Číslo sa rozpíše na rímske tisícky, päťstovky, stovky, päťdesiatky, desiatky, päťky a jednotky (t. j. od najvyšších po najnižšie):***

$$1672 = 1000 + 600 + 70 + 2 = 1000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 = MDCLXXII.$$

– ***Ak sa v čísle vyskytujú číslice* 4 *alebo* 9*, je nutné uplatniť pravidlo o odčítaní:***

$$900 = 1000 - 100 = CM.$$

Ž: *A ak za sebou nemôžu nasledovať viac ako tri rovnaké symboly, tak ako pomocou rímskych číslic zapíšem veľké čísla?*

U: Rímske číslice neboli určené na to, aby sa pomocou nich zapisovali veľké čísla. Ale v stredoveku sa zaviedli ďalšie symboly, ktoré sa dnes už nepoužívajú. Veľké čísla sa zapisujú pomocou vodorovnej čiary nad symbolom. Vodorovná čiara (tzv. vinculum) nad číslom znamenala číslo tisíckrát väčie než prestavuje symbol pod ňou:

$$\overline{V} = 5000,\ \overline{X} = 10\,000,\ \overline{L} = 50\,000,\ \overline{C} = 100\,000,\ \overline{M} = 1\,000\,000.$$

Ž: *Aha, takže napríklad číslo* $8\,000$ *sa zapíše ako* $\overline{VIII}$*?*

U: Presne tak.

Úloha 1: *Zapíšte pomocou rímskych číslic čísla* 284, 1999, 2698.

Výsledok: 284 =*CCLXXXIV*, 1999 =*MCMXCIX*, 2698 =*MMDCXCVIII*.

Úloha 2: *Aké najväčšie číslo sa bez použitia vincula dá zapísať pomocou rímskych číslic?*

Výsledok: 3999.

Príklad 5: *Vyjadrite v desiatkovej sústave čísla napísané v rímskej číselnej sústave:*

$$VII, XXXIII, CC, DXVI, MCXI,\ IV, XL, XC, CM,$$

$$XIX, XLII, CDXC, MXCIV, MCDXCVIII, MCMLXXIX.$$

U: Aké rímske číslice poznáš?

Ž: *Sú to vlastne písmená I, V, X, L, C, D, a M, pričom:*

$$I = 1,\ V = 5,\ X = 10,\ L = 50,\ C = 100,\ D = 500,\ M = 1000.$$

Pamätám si ich pomocou vety:

***I**van **V**iedol **X**éniu **L**esnou **C**estou **D**o **M**esta.*

U: Dobre. Pri prevode rímskych čísel na arabské čísla platia takéto pravidlá:

- ***Ak za väčšou rímskou číslicou nasleduje menšia alebo rovnaká, tak sa ich hodnoty sčítajú***, napríklad:

$$CLXXXII = 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 182.$$

- ***Ak je menšia rímska číslica pred väčšou, tak sa menšie číslo odčíta***:

$$IX = -1 + 10 = 9,$$

$$MCM = 1000 + (-100 + 1000) = 1900.$$

Ž: *Skúsim teda zapísať dané čísla pomocou arabských číslic. Na čísla VII, $XXXIII, CC$, $DXVI$ použijem prvé pravidlo:*
$VII = 5 + 1 + 1 = 7$,
$XXXIII = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 33$,
$CC = 100 + 100 = 200$,
$DXVI = 500 + 10 + 5 + 1 = 516$,
$MCXI = 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$.

U: Správne. Vo všetkých týchto rímskych číslach nasledovala menšia číslica po väčšej, takže sa ich hodnoty len sčítali.

Ž: *V niekoľkých ďalších číslach je ale menšia číslica pred väčšou, takže jej hodnotu budem odpočítavať:*
$IV = -1 + 5 = 4$,
$XL = -10 + 50 = 40$,
$XC = -10 + 100 = 90$,
$CM = -100 + 1000 = 900$.

U: Výborne.

Ž: *No a tá posledná skupina čísel je mix. Budem asi aj pripočítavať aj odpočítavať.*

U: Zapisuj si to takto:
$XIX = X + IX = 10 + (-1 + 10) = 10 + 9 = 19$,
$XLII = XL + I + I = (-10 + 50) + 1 + 1 = 42$.

Ž: *Dobre:*

$CDXC = CD + XC = (-100 + 500) + (-10 + 100) = 490$,

$MXCIV = M + XC + IV = 1000 + (-10 + 100) + -1 + 5 = 1094$,

$MCDXCVIII = M + CD + XC + V + I + I + I = 1000 + (-100 + 500) + (-10 + 100) + + 5 + 1 + 1 + 1 = 1498$,

$MCMLXXIX = M + CM + L + X + X + IX = 1000 + (-100 + 1000) + 50 + 10 + 10 + + (-1 + 10) = 1979$.

U: Zvládol si to na výbornú.

Úloha 1: *Zostavte číslo pomocou rímskych číslic tak, aby každá číslica bola zapísaná práve raz a to od najvyššej hodnoty po najmenšiu. Zapíšte ho aj pomocou arabských číslic.*

Výsledok: $MDCLXVI = 1666$.

Úloha 2: *Zostavte číslo pomocou rímskych číslic tak, aby každá číslica bola zapísaná práve raz a číslo malo najmenšiu možnú hodnotu. Zapíšte ho aj pomocou arabských číslic.*

Výsledok: $MCDXLIV = 1444$.

Príklad 6: *Keď napíšeme za sebou všetky nepárne čísla od čísla* 347 *po číslo* 1*, dostaneme číslo*

$$347345343341\ldots131197531.$$

a) Škrtnite v ňom jednu číslicu tak, aby ostalo čo najmenšie číslo.
b) Škrtnite v ňom tri číslice tak, aby ostalo čo najväčšie číslo.
c) Vložte medzi jeho číslice číslicu 5 *tak, aby vzniklo čo najmenšie číslo.*

Ž: *Ajaj. Veď to číslo je také dlhé, že si ho celé nemôžem ani napísať.*

U: Nepotrebuješ ho mať napísané celé. Ak chceš aby škrtnutím jednej číslice vzniklo čo najmenšie číslo, kde budeš škrtať? Na začiatku alebo na konci čísla?

Ž: *Škrtnem najväčšiu číslicu zo začiatku čísla. V našom prípade to bude číslica* 7*, lebo za ňou nasleduje menšia číslica.*

Z čísla 347345343341 . . . 97531 *dostaneme číslo* 34345343341 . . . 97531.

U: Dobre. V druhej časti úlohy máš škrtnúť 3 číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo čo najväčšie.

Ž: *Opäť budem škrtať číslice zo začiatku čísla. Ak škrtnem prvé dve číslice* 3 *a* 4 *bude číslo začínať na sedmičku. Škrtnem potom ešte číslicu* 3 *za sedmičkou, aby za sedmičkou nasledovala štvorka.*

Z čísla 347345343341 . . . 97531 *dostaneme číslo* 745343341 . . . 97531.

U: Áno. Ostala nám posledná časť úlohy. Vložiť číslicu 5, aby vzniklo čo najmenšie číslo.

Ž: *Dám ju na koniec.*

U: To nebude dobré riešenie. Vezmi si len koncovku nášho čísla. Vložím päťku na koniec – tak ako chceš ty, ale vložím ju aj inam. Porovnaj sám, ktoré je menšie:

975 315 alebo 957 531?

Ž: *To vaše. Takže musím päťku dať niekam na začiatok, aby som znížil hodnoty na prvých miestach. Už viem. Dám ju na tretie miesto spredu. Pred sedmičku.*

Z čísla 347345343341 . . . 97531 *dostaneme číslo* 3457345343341 . . . 97531.

U: Správne.

Úloha 1: *V čísle* 846 273 *škrtnite dve číslice tak, aby vzniklo:*
a) čo najmenšie číslo,
b) čo najväčšie číslo.

Výsledok: *a) Škrtneme číslice* 8 *a* 6*. Z čísla* 846 273 *vznikne* 4 273.
b) Škrtneme číslice 4 *a* 2*. Z čísla* 846 273 *vznikne* 8 673.

Úloha 2: *Medzi číslice čísla* 937 814 *vložte číslicu* 6 *tak, aby vzniklo:*
a) čo najmenšie číslo,
b) čo najväčšie číslo.

Výsledok: *a)* 9 367 814,
b) 9 637 814.

Príklad 7: *Trojciferné číslo má vo svojom zápise jednu číslicu 4. Ak ju presunieme na začiatok, dostaneme číslo o 81 menšie ako pôvodné číslo. Určte pôvodné číslo.*

Ž: *Číslo, ktoré mám nájsť si označím x.*

U: Ak máš pracovať s číslicami daného čísla, je lepšie mať označenú každú číslicu zvlášť. Napríklad takto:

$$x = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C = ABC.$$

Ž: *Aha. Asi nemá význam uvažovať, že $A = 4$, pretože štvorka by už stála na začiatku a jej presunutím na začiatok by sa číslo nezmenilo.*

U: Dobre. Musíš teda rozobrať prípady ak $B = 4$ alebo $C = 4$.

Ž: *Tak najprv nech $B = 4$. Dostanem príklad:*

$$A4C - 81 = 4AC.$$

U: Máš zistiť, aké číslice môžeme dosadiť za A a C. Skús odčítavať.

Ž: *Keby to boli čísla, tak by som začal odzadu: 1 a koľko je C? Podľa zadania je to C.*

$$\boxed{\begin{array}{r} A4C \\ -\quad 81 \\ \hline 4AC \end{array}}$$

To je nejaký nezmysel. Ak od C odpočítam 1, nedostanem opäť C.

U: Táto možnosť teda nemá riešenie. Ostáva preveriť možnosť, že $C = 4$.

Ž: *Takže príklad sa zmení na:*

$$AB4 - 81 = 4AB.$$

$$\boxed{\begin{array}{r} AB4 \\ -\quad 81 \\ \hline 4AB \end{array}}$$

Odtiaľ dostanem, že $B = 3$, lebo pri odčítaní na mieste jednotiek je $B = 4 - 1$.

$$\boxed{\begin{array}{r} A34 \\ -\quad 81 \\ \hline 4A3 \end{array}}$$

Lenže ak $B = 3$, tak potom $A = 5$, lebo pri odčítaní v prostrednom stĺpci sa pýtam: 8 a koľko je 13? Odpoveď je: 8 a 5 je 13.
Pôvodné číslo je 534. *Ak presuniem štvorku na začiatok dostanem 453 a $534 - 453 = 81$.*

U: Výborne.

Úloha : *Ak pred trojciferné číslo pripíšete číslicu* 1 *vznikne číslo, ktoré je deväťkrát väčšie než pôvodné číslo. Určte pôvodné trojciferné číslo.*

Výsledok*:* 125*, pretože* $125 \cdot 9 = 1125$*.*

Príklad 8: *Akými podmienkami sú definované intervaly:*

a) $\langle -2; 7)$,

b) $(10; +\infty)$,

c) $(-\infty; 4\rangle$?

U: Podmienky, ktoré máš určiť, sa niekedy nazývajú aj ***charakteristické vlastnosti***. Vyjadrujú, aké reálne čísla x tvoria daný interval.

Ž: *Aha, už rozumiem.*
a) *Prvý interval je zľava uzavretý a sprava otvorený a patria sem všetky reálne čísla od -2 po 7. Uhlová zátvorka pri čísle -2 znamená, že číslo -2 patrí do intervalu a okrúhla zátvorka pri čísle 7 znamená, že číslo 7 tu nepatrí.*

U: Máme teda len polouzavretý interval. A teraz tú charakteristickú vlastnosť všetkých čísel daného intervalu.

Ž: *Pomocou symbolov nerovnosti zapíšem:*

$$\langle -2; 7) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leqq x < 7\}.$$

U: Výborne. Zapísať sa to môže aj takto:

$$\langle -2; 7) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leqq x \ \wedge \ x < 7\}.$$

Ž: **b)** *Druhý interval je z oboch strán otvorený. Zľava je ohraničený číslom 10, ale číslo 10 v tomto intervale neleží.*

U: Sprava je interval neohraničený, patria sem všetky reálne čísla, ktoré sú väčšie ako 10.

Ž: *Takže:*

$$(10; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 10\}.$$

U: Dobre. Zapamätaj si, že pri symboloch $+\infty$ a $-\infty$ musí byť pri zápise intervalu vždy okrúhla zátvorka.

Ž: *Jasné, lebo $+\infty$ nie je žiadne konkrétne číslo, ktoré by patrilo do intervalu ako posledné. Podobne $-\infty$ nie je žiadne číslo, ktoré by do intervalu patrilo ako prvé.*

U: Tak prejdi na posledný príklad.

Ž: **c)** *Tretí interval je zľava otvorený. Sprava je uzavretý číslom 4. Znamená to, že sem patria všetky čísla od $-\infty$ po 4. Teda všetky čísla menšie alebo rovné ako 4.*

U: Ide o polouzavretý interval. Zapíš charakteristickú vlastnosť všetkých čísel tohto intervalu.

Ž: *Dobre:*

$$(-\infty; 4\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x \leqq 4\}.$$

Úloha : *Akými podmienkami sú definované intervaly:*

a) $\langle -3; 5\rangle$,

b) $(-9; -1)$,

c) $\langle -6; +\infty)$,

d) $(-\infty; -8)$*?*

Výsledok*:*

a) $\langle -3; 5\rangle = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leqq x \leqq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leqq x \ \wedge \ x \leqq 5\}$,
b) $(-9; -1) = \{x \in \mathbb{R} : -9 < x \ \wedge \ x < -1\}$,
c) $\langle -6; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqq -6\}$,
d) $(-\infty; -8) = \{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$.